Technique 02. Résoudre des équations polynomiales de degré deux.

I Un algorithme de résolution pour les équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Exercice 1.
Déterminez les solutions réelles de l'équation $-3x^2 - 6x + 24 = 0$.

Correction de l'exercice 1

Déterminons les solutions de l'équation.

1. Nature de l'équation.
   $P(X) = -3X^2 - 6X + 24$ est un polynôme du second degré : $a = -3$, $b = -6$ et $c = 24$.
2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4 \times (-3) \times 24 \\ &= 324\end{aligned}$$

   Comme Δ est strictement positif l'équation admet deux solutions distinctes.
3. Calcul des solutions.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{324}}{2 \times (-3)}$$
$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{324}}{2 \times (-3)}$$
$$x_2 = -4$$

4. Conclusion.

   L'ensemble des solutions de l'équation $-3x^2 - 6x + 24 = 0$ est $\mathcal{S} = \{-4; 2\}$.

Exercice 2.
Déterminez, si possible, la forme factorisée de $P(X) = 2X^2 + 24X + 72$.

Correction de l'exercice 2

Déterminons les racines de f.

1. Nature de la fonction.
   Il s'agit d'un polynôme de degré deux avec : $a = 2$, $b = 24$ et $c = 72$.

2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 24^2 - 4\times 2\times 72\\ &= 0\end{aligned}$$

Comme Δ est nul l'équation admet une solution (double).

3. Calcul de la solution.

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{-b}{2a}\\ x_0 &= \frac{-24}{2\times 2}\\ x_0 &= -6\end{aligned}$$

4. Conclusion.

La forme factorisée de P est donc

$$P(X) = 2(X+6)^2.$$

Exercice 3.
Déterminez les éventuels zéros de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + x + 1$.

Correction de l'exercice 3

1. Nature de la fonction.
   $X^2 + X + 1$ est un polynôme de degré deux avec : $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.
2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 1^2 - 4\times 1\times 1\\ &= -3\end{aligned}$$

Comme Δ est strictement négatif le polynôme n'admet aucune racine.

3. Conclusion.

L'ensemble des zéros de f est $\mathcal{S} = \varnothing$.

II Application : étude du signe d'une fonction polynomiale de degré deux.

1 Utiliser la forme factorisée.

Exercice 4. C

Étudiez le signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -2(x-2)(x+3)$.

Correction de l'exercice 4

Dressons le tableau de signe de f.

f est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme factorisée avec $a = -2$, $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$.

f est donc du signe de $a < 0$ sauf entre ses racines.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 5. C

Étudiez le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7(x+3)^2$.

Correction de l'exercice 5

Dressons le tableau de signe de g.

g est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme factorisée avec $a = 7$, $x_1 = -3$ et $x_2 = -3$.

g est donc du signe de $a > 0$ sauf entre ses racines.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Exercice 6. C

Dressez le tableau de signe de la fonction h définie par $h(x) = -x^2 - 1$ pour tout x réel.

Correction de l'exercice 6

Démontrons que h est strictement négative.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Nous avons successivement

$$x^2 \geqslant 0$$
$$-x^2 \leqslant 0$$
$$-x^2 - 1 < 0$$
$$h(x) < 0$$

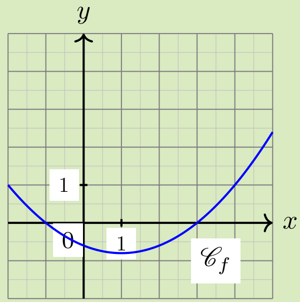
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) < 0$.

h est strictement négative.

2 Signe du trinôme dans le cas général.

Exercice 7. B

Que pouvez-vous dire des coefficients a, x_1 et x_2 de la forme factorisée de la fonction f polynomiale de degré deux représentée ci-contre.



Correction de l'exercice 7

* Comme nous l'avons déjà remarqué (sans démonstration) puisque la parabole est orientée vers le haut, le coefficient dominant est strictement positif.
  Sans calculs il est impossible d'en dire plus.
* Les zéros de la fonction sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses donc :
  $$x_1 = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = 3.$$
  On pouvait tout aussi bien choisir $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$.
* Si nous souhaitons obtenir une valeur pour a il nous faut des informations supplémentaires. Pour cela utilisons les coordonnées d'un point de la courbe.
  D'après ce qui précède la forme factorisée de f sera : $f(x) = a(x+1)(x-3)$.
  Comme $A(4; 1) \in \mathscr{C}_f$,

$$f(4) = 1$$

ce qi équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} a(4+1)(4-3) &= 1 \\ 5a &= 1 \\ a &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Exercice 8. C

Dressez le tableau de signe de

1. la fonction ℓ définie sur $[-10;10]$ par $\ell(x) = x+1$ pour tout $x \in [-10;10]$,
2. la fonction f définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = 3x^2 - 24x + 48$ pour tout $x \in [-10;10]$,
3. la fonction g définie sur $[-5;3]$ par $g(x) = x^2 + x - 2$ pour tout $x \in [-5;3]$,
4. la fonction h trinôme définie pour tout $x \in [-2;2]$ par $h(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Correction de l'exercice 8

1. Dressons le tableau de signe de ℓ.

   Ce n'est pas parce que vous avez un marteau qu'il y a des clous partout : il ne s'agit pas d'une fonction polynomiale de degré deux.
   $\ell : x \mapsto x+1$ est une fonction affine avec $m = 1$ et $p = 1$. $m > 0$ donc ℓ est strictement croissante. ℓ s'annule en $-\frac{p}{m} = -\frac{1}{1} = -1$.

x	-10		-1		10
$\ell(x)$		$-$	0	$+$	

2. Dressons le tableau de signe de f.

   * f est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 3$, $b = -24$ et $c = 48$.
   *

   $$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-24)^2 - 4 \times 3 \times 48 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   $\Delta = 0$ donc f admet une racine double.

*

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{-b}{2a} \\ x_0 &= \frac{-(-24)}{2\times 3} \\ x_0 &= 4 \end{aligned}$$

* Le trinôme f est du signe de $a > 0$ sauf entre ses racines.

x	-10		4		10
$f(x)$		$+$	0	$+$	

3. Dressons le tableau de signe de g.

* g est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -2$.
*

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4\times 1\times(-2) \\ &= 9 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc g admet deux racines distinctes.

*

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1}$	$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1}$
$x_1 = -2$	$x_2 = 1$

* Le trinôme g est du signe de $a > 0$ sauf entre ses racines.

x	-5		-2		1		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Étudions le signe de h sur $[-2; 2]$.

* $h(X)$ est un polynôme de degré deux, donné sous forme développée avec : $a = -1$, $b = 4$ et $c = -3$.
  $x_1 = 1$ est clairement racine de $h(X)$. Nous en déduisons par équivalences successives :

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \frac{c}{a} \\ 1\times x_2 &= \frac{-3}{-1} \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

* Le trinôme h est du signe de son coefficient dominant $a<0$ saut entre ses racines donc

x	-2		1		2
$h(x)$		$-$	0	$-$	

Si vous avez du mal à voir ce qui ses passe voici une présentation alternative dans laquelle on considère que h est définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
h		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

Exercice 9. C

Soit $f : x \mapsto -2x^2-4x+6$ définie sur $[-7;10]$.

1. Déterminez les racines de f.
2. Étudiez le signe de f sur $[-7;10]$.
3. Résolvez dans $[-7;10]$ l'inéquation

$$(E): \quad -2x^2-4x+6>0.$$

Correction de l'exercice 9

1. déterminons les racines de $f(X)$.

 * $f(X)$ est un trinôme de de degré deux donné sous forme développée avec $a=-2$, $b=-4$ et $c=6$.
 * Clairement 1 et -3 sont des racines de $f(X)$.

 l'ensemble des racines de $f(X)$ est $\{1;-3\}$.

2. Étudions le signe de f sur $[-7;10]$.

 f est une fonction polynomiale de degré deux donc elle est du signe de son coefficient dominant $a<0$ sauf entre ses racines donc :

x	-7		-3		1		10
f		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. D'après le précédent tableau de signe :

l'ensemble des solutions de (E) est $\mathscr{S} =]-3;1[$.

Exercice 10. C

Résolvez l'inéquation $2x^2 - 220x + 2000 > 0$ dans $\mathbb{R}$.
Se ramener à l'étude du signe d'une fonction judicieusement choisie.

Correction de l'exercice 10

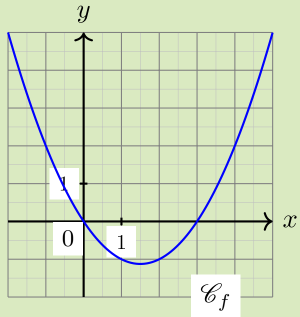
$\Delta = 32400$, $x_1 = 10$, $x_2 = 100$.

x	$-\infty$		10		100		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathscr{S} =]-\infty;10[\cup]100;+\infty[$.

Exercice 11.

Sachant que le coefficient dominant de la fonction polynomiale de degré deux f, représentée ci-contre, est $\frac{1}{2}$, donnez sans justification la forme factorisée de f.



Correction de l'exercice 11

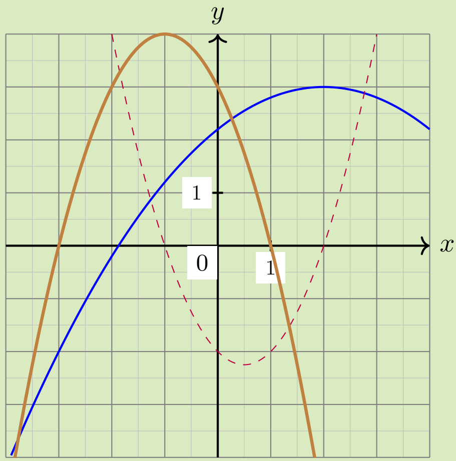
$f(X) = \frac{1}{2}X(X-3)$.

III Exercices.

Exercice 12.

Sont tracées ci-contre les courbes représentatives des fonctions polynomiales de degré deux f, g et h.
Nous savons de plus que $f(-3) = -2$.
Recopiez en complétant, sans aucune justification, les expressions algébriques suivantes.

- $f(x) = -0,02(x - \ldots)^2 + \ldots$
- $g(x) = x^2 - x + \ldots$
- $h(x) = -(x - \ldots)(x - \ldots)$



Correction de l'exercice 12

g est la seule fonction dont la parabole est orientée vers le haut (coefficient dominant strictement positif). Son terme constant est obtenu pour $x = 0$. Donc

$$\boxed{g(x) = x^2 - x - 2.}$$

h est donnée sous forme factorisée il faut donc identifier ses racines. Nous pouvons supposer qu'il s'agit donc de la parabole dont les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont lisibles.

$$\boxed{h(x) = -(x + 3)(x - 1).}$$

Puis en lisant les coordonnées du sommet de la troisième parabole nous obtenons la forme canonique de f.

$$\boxed{f(x) = -0,02(x - 2)^2 + 3.}$$

Nous pouvons alors contrôler avec la calculatrice que les expressions algébriques ainsi obtenues correspondent bien au graphique.

Exercice 13. B

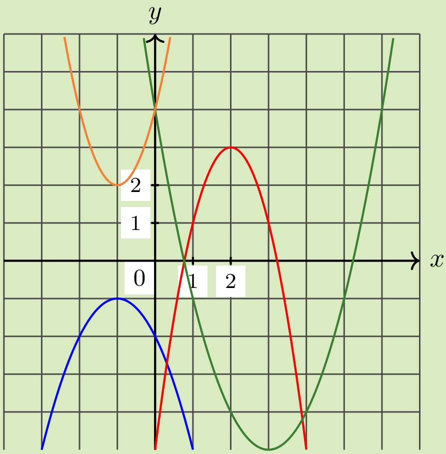
Associez chaque courbe à son trinôme.

$f(x) = -(x+1)^2 - 1$

$g(x) = -2(x-2)^2 + 3$

$h(x) = (x-3)^2 - 5$

$k(x) = 2(x+1)^2 + 2$

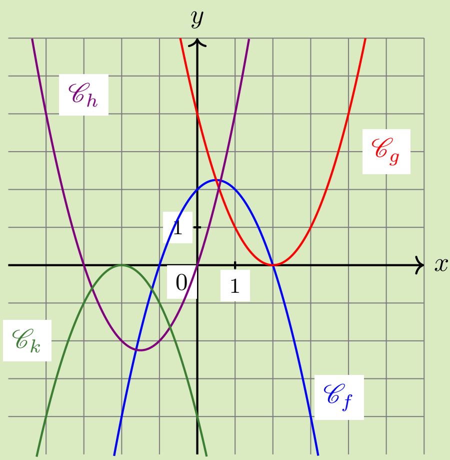


Correction de l'exercice 13

f bleu. g rouge. h vert. k orange.

Exercice 14. B

Sachant que les fonctions polynomiales de degré deux représentées ci-dessous s'écrivent sous la forme $x \mapsto x^2 + bx + c$ ou $x \mapsto -x^2 + bx + c$, donnez la forme factorisée de chaque fonction.



Exercice 15. C

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

a) $f_1(x) = 49x^2 - 4$.

b) $f_2(x) = -3x^2 + 3x$.

c) $f_3(x) = 4x^2 - 8x$.

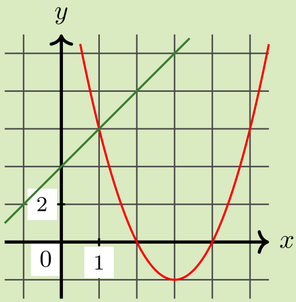
d) $f_4(x) = 3x^2 + 30x + 75$.

e) $f_5(x) = (4x-1) + (4x-1)(x+2)$.

f) $f_6(x) = x^2 - 4x + 4$.

Exercice 16. B

On considère le polynôme $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ et la fonction affine $g(x) = 2x + 4$ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous.



1. (a) Déterminez par lecture graphique, une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
   (b) Vérifiez que cette solution est exacte.
2. Déterminez la seconde solution.

Correction de l'exercice 16

1. (a) Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g.
   Donc 1 est une solution.
   (b) D'une part $f(1) = 6$, d'autre part $g(1) = 6$ donc 1 est bien une solution de l'équation.
2. $f(x) = g(x) \iff 2x^2 - 14x + 12 = 0$.
   $x_1 x_2 = \frac{c}{a} \iff x_2 = 6$.

Exercice 17. B

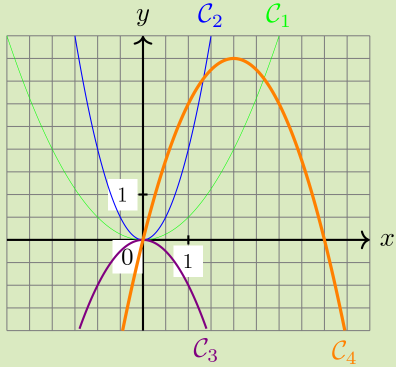
Les fonction indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elle.

$f_1 : x \mapsto -x^2$

$f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

$f_3 : x \mapsto 2x^2$

$f_4 : x \mapsto x(4-x)$



Exercice 18. B

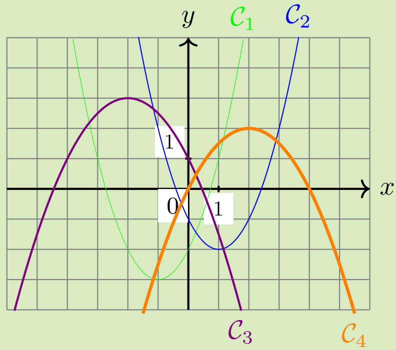
Les fonctions indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elles.

$f_1 : x \mapsto x^2 + 2x - 2$

$f_2 : x \mapsto -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

$f_3 : x \mapsto (x-1)^2 - 2$

$f_4 : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$



Exercice 19. C

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

a) $f_1(x) = 6x - 3x^2$.

b) $f_2(x) = -9x^2 + 36$.

c) $f_3(x) = 4x^2 - 8x + 8$.

d) $f_4(x) = -x^2 - 2x - 1$.

e) $f_5(x) = 2(x-3) - (x-4)(x-3)$.

f) $f_6(x) = (x+2)^2 - 8$.

Exercice 20.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

a) $f_1(x) = (2x+1)^2 - (1-x)^2$.

b) $f_2(x) = x^2 - 20x + 100$.

c) $f_3(x) = 25 - (x+1)^2$.

d) $f_4(x) = 4x^2 + 4 + 8x$.

e) $f_5(x) = 16(x+1)^2 - 25x^2$.

f) $f_6(x) = 16x^2 - 81$.

Exercice 21.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

a) $f_1(x) = x^2 - 4 + (x-2)(x+1)$.

b) $f_2(x) = 3x^2 - 12x + 12$.

c) $f_3(x) = (x+1)(x+2) - (3x+6)$.

d) $f_4(x) = x^2 - 2x + 3x^2$.

e) $f_5(x) = 2x(x+3) + 4x + 12$.

f) $f_6(x) = (x-3)(3x-4) - 3x + 4$.

Exercice 22. D

Résolvez les équations suivantes.

1. $2x^2 + 24x + 72 = 0$.
2. $-x^2 - 12x = 35$.
3. $-2x^2 + 4x - 3 = 0$.
4. $-3x^2 + 3x + 330 = 0$.
5. $-4x^2 + 96x - 576 = 0$.
6. $x^2 - 8x = -23$.
7. $x^2 - 17x + 52 = 0$.
8. $2x^2 - 18x + 40 = 0$.
9. $2x^2 + 28x + 91 = 0$.
10. $-3x^2 + 3x + 126 = 0$.

Exercice 23. C

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2 + 5x - 6 = 0$.
2. $x^2 + x + 2 = 0$.
3. $-2x^2 + 3x + 4 = 0$.
4. $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
5. $x^2 - 9x + 20 = 0$.
6. $2x^2 - 2x\sqrt{5} + 3 = 0$.
7. $3x^2 + 2x\sqrt{6} - 1 = 0$.
8. $4x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 = 0$.
9. $x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$.
10. $16x^2 - 8x + 13 = 0$.

Correction de l'exercice 23

1. $\mathscr{S} = \{1; -6\}$.
2. $\mathscr{S} = \varnothing$.
3. $\mathscr{S} = \left\{\frac{3+\sqrt{41}}{4}; \frac{3-\sqrt{41}}{4}\right\}$.
4. $\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
5. $\mathscr{S} = \{4; 5\}$.
6. $\mathscr{S} = \varnothing$.
7. $\mathscr{S} = \left\{\frac{-3-\sqrt{6}}{3}; \frac{-3+\sqrt{6}}{3}\right\}$.
8. $\mathscr{S} = \varnothing$.
9. $\mathscr{S} = \left\{\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}$.
10. $\mathscr{S} = \varnothing$.

Exercice 24. E

1. On se propose ici de résoudre l'équation :

$$2x^4 + 3,5x^2 - 1 = 0 \quad (E)$$

   (a) Montrez qu'en posant $X = x^2$, l'équation (E) s'écrit

$$2X^2 + 3,5X - 1 = 0 \quad (E')$$

   (b) Résolvez l'équation (E') d'inconnue X.

   (c) Déduisez-en les solutions de l'équation (E) en utilisant le fait que $X = x^2$.

2. En vous inspirant de la méthode précédente résolvez dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ l'équation :

$$12\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - 10\left(\frac{1}{x-1}\right) + 2 = 0 \quad (F)$$