Technique 02. Résoudre des équations polynomiales de degré deux.

I Un algorithme de résolution pour les équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

La forme canonique de la fonction $P(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$$P(X) = a\left(X - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

En résolvant l'équation $P(x) = 0$ on voit apparaître :

$$\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Pour pouvoir prendre la racine carré des deux côtés de l'égalité il faut d'abord s'assurer qu'il s'agit de nombres positifs. Autrement dit il faut déterminer le signe du nombre $b^2 - 4ac$.

Définition 1

Soient a, b et c des réels.

On appelle *discriminant* du polynôme de degré deux $aX^2 + bX + c$ le nombre réel :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Proposition 1

Soient a, b et c des réels.

(i) Si $\Delta > 0$ alors le polynôme $aX^2 + bX + c$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(ii) Si $\Delta = 0$ alors le polynôme $aX^2 + bX + c$ admet une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

(iii) Si $\Delta < 0$ alors $aX^2 + bX + c$ n'admet aucune racine réelle mais il admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet x_1 et x_2 pour racine alors il est possible d'écrire ce trinôme

$$a(x - x_1)(x - x_2),$$

qu'on appelle *la forme factorisée* du trinôme.

Exemples.

1. $P(X) = X^2 + 5X + 6.$
2. $P(X) = 9X^2 + 6X + 1.$
3. $P(X) = X^2 + X + 3.$

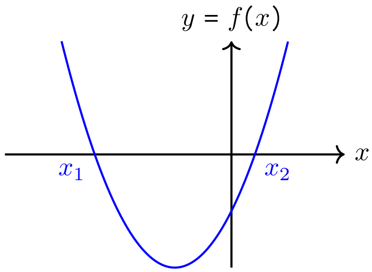
Exercice 1.
Déterminez les solutions réelles de l'équation $-3x^2 - 6x + 24 = 0$.

Exercice 2.
Déterminez, si possible, la forme factorisée de $P(X) = 2X^2 + 24X + 72$.

Exercice 3.
Déterminez les éventuels zéros de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + x + 1$.

II Application : étude du signe d'une fonction polynomiale de degré deux.

Pour étudier le signe d'une fonction polynomiale de degré deux nous privilégierons la forme factorisée. Si $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ alors x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses.



1 Utiliser la forme factorisée.

Exercice 4. C
Étudiez le signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -2(x-2)(x+3)$.

Exercice 5. C
Étudiez le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7(x+3)^2$.

Exercice 6. C
Dressez le tableau de signe de la fonction h définie par $h(x) = -x^2 - 1$ pour tout x réel.

2 Signe du trinôme dans le cas général.

L'observation géométrique fait apparaître la formule mnémotechnique déjà vue reste valable : un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre les éventuelles racines.

Nous avons déjà justifié ce résultat lorsqu'il existe une forme factorisée. Justifions brièvement pourquoi ce résultat reste valable lorsque le trinôme n'a pas de racines.

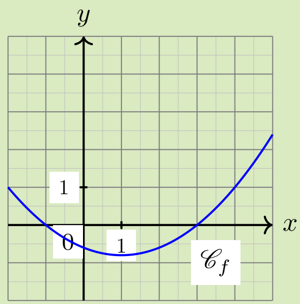
La forme canonique pour un trinôme f est

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \\ &= a\left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Si $\Delta < 0$, alors $\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et donc f est du signe de a.

Exercice 7. B

Que pouvez-vous dire des coefficients a, x_1 et x_2 de la forme factorisée de la fonction f polynomiale de degré deux représentée ci-contre.



Exercice 8. C

Dressez le tableau de signe de

1. la fonction ℓ définie sur $[-10; 10]$ par $\ell(x) = x + 1$ pour tout $x \in [-10; 10]$,
2. la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = 3x^2 - 24x + 48$ pour tout $x \in [-10; 10]$,
3. la fonction g définie sur $[-5; 3]$ par $g(x) = x^2 + x - 2$ pour tout $x \in [-5; 3]$,
4. la fonction h trinôme définie pour tout $x \in [-2; 2]$ par $h(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Exercice 9. C

Soit $f : x \mapsto -2x^2 - 4x + 6$ définie sur $[-7; 10]$.

1. Déterminez les racines de f.
2. Étudiez le signe de f sur $[-7; 10]$.
3. Résolvez dans $[-7; 10]$ l'inéquation

$$(E) : \quad -2x^2 - 4x + 6 > 0.$$

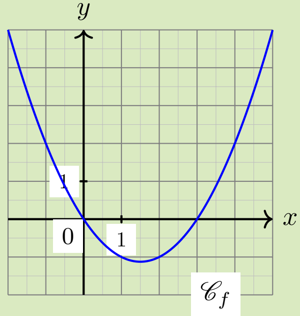
Exercice 10. C

Résolvez l'inéquation $2x^2 - 220x + 2000 > 0$ dans $\mathbb{R}$.

Se ramener à l'étude du signe d'une fonction judicieusement choisie.

Exercice 11.

Sachant que le coefficient dominant de la fonction polynomiale de degré deux f, représentée ci-contre, est $\frac{1}{2}$, donnez sans justification la forme factorisée de f.



III Exercices.

Pour les exercices avec des lectures graphiques il faut parfois utiliser la forme développée du trinôme, $ax^2 + bx + c$, la forme factorisée (si elle existe) $a(x - x_1)(x - x_2)$ et parfois la forme canonique, $a(x - \alpha)^2 + \beta$ où (α, β) sont les coordonnées du sommet de la parabole.

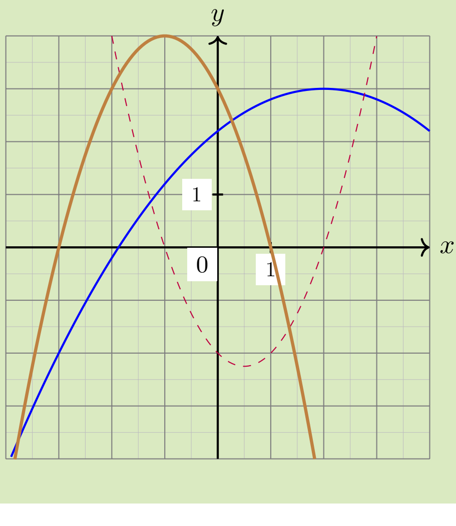
Exercice 12.

Sont tracées ci-contre les courbes représentatives des fonctions polynomiales de degré deux f, g et h.

Nous savons de plus que $f(-3) = -2$.

Recopiez en complétant, sans aucune justification, les expressions algébriques suivantes.

- $f(x) = -0,02(x - \dots)^2 + \dots$
- $g(x) = x^2 - x + \dots$
- $h(x) = -(x - \dots)(x - \dots)$



Exercice 13. B

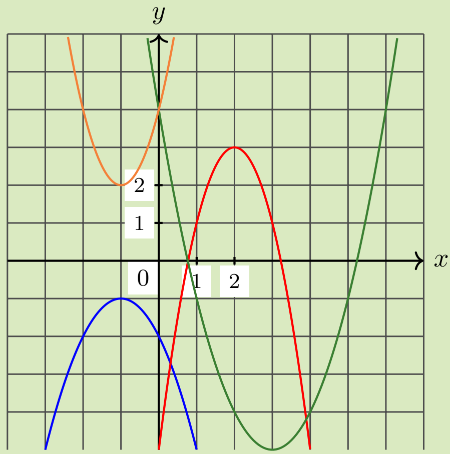
Associez chaque courbe à son trinôme.

$f(x) = -(x+1)^2 - 1$

$g(x) = -2(x-2)^2 + 3$

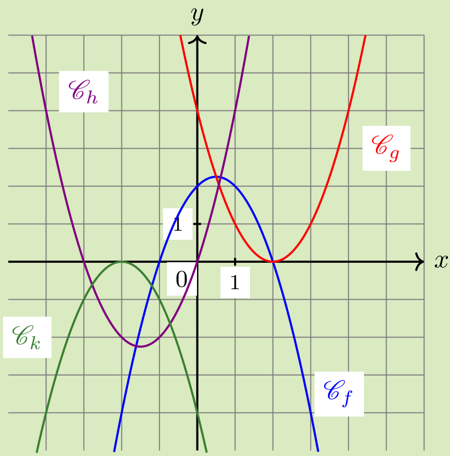
$h(x) = (x-3)^2 - 5$

$k(x) = 2(x+1)^2 + 2$



Exercice 14. B

Sachant que les fonctions polynomiales de degré deux représentées ci-dessous s'écrivent sous la forme $x \mapsto x^2 + bx + c$ ou $x \mapsto -x^2 + bx + c$, donnez la forme factorisée de chaque fonction.



Exercice 15. C

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

a) $f_1(x) = 49x^2 - 4.$

b) $f_2(x) = -3x^2 + 3x.$

c) $f_3(x) = 4x^2 - 8x.$

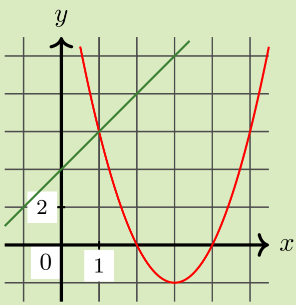
d) $f_4(x) = 3x^2 + 30x + 75.$

e) $f_5(x) = (4x - 1) + (4x - 1)(x + 2).$

f) $f_6(x) = x^2 - 4x + 4.$

Exercice 16. B

On considère le polynôme $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ et la fonction affine $g(x) = 2x + 4$ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous.



1. (a) Déterminez par lecture graphique, une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
   (b) Vérifiez que cette solution est exacte.
2. Déterminez la seconde solution.

Exercice 17. B

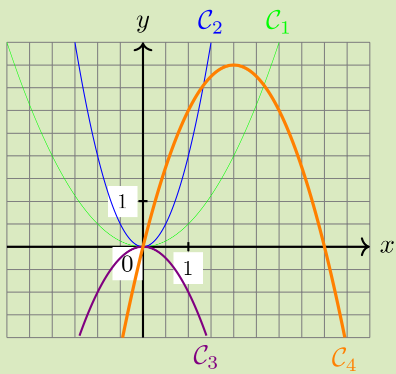
Les fonction indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elle.

$f_1 : x \mapsto -x^2$

$f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

$f_3 : x \mapsto 2x^2$

$f_4 : x \mapsto x(4 - x)$



Exercice 18. B

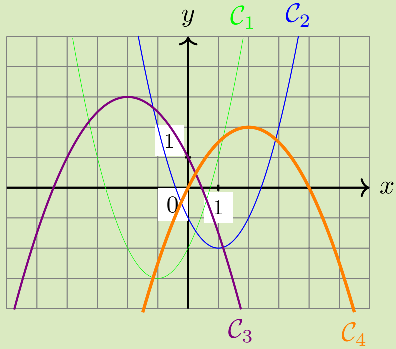
Les fonctions indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elles.

$f_1 : x \mapsto x^2 + 2x - 2$

$f_2 : x \mapsto -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

$f_3 : x \mapsto (x-1)^2 - 2$

$f_4 : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$



Exercice 19. C

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

a) $f_1(x) = 6x - 3x^2$.

b) $f_2(x) = -9x^2 + 36$.

c) $f_3(x) = 4x^2 - 8x + 8$.

d) $f_4(x) = -x^2 - 2x - 1$.

e) $f_5(x) = 2(x-3) - (x-4)(x-3)$.

f) $f_6(x) = (x+2)^2 - 8$.

Exercice 20.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

a) $f_1(x) = (2x+1)^2 - (1-x)^2$.

b) $f_2(x) = x^2 - 20x + 100$.

c) $f_3(x) = 25 - (x+1)^2$.

d) $f_4(x) = 4x^2 + 4 + 8x$.

e) $f_5(x) = 16(x+1)^2 - 25x^2$.

f) $f_6(x) = 16x^2 - 81$.

Exercice 21.

Donnez la forme factorisée des expressions polynomiales de degré deux suivantes :

a) $f_1(x) = x^2 - 4 + (x-2)(x+1)$.

b) $f_2(x) = 3x^2 - 12x + 12$.

c) $f_3(x) = (x+1)(x+2) - (3x+6)$.

d) $f_4(x) = x^2 - 2x + 3x^2$.

e) $f_5(x) = 2x(x+3) + 4x + 12$.

f) $f_6(x) = (x-3)(3x-4) - 3x + 4$.

Exercice 22. D

Résolvez les équations suivantes.

1. $2x^2 + 24x + 72 = 0$.
2. $-x^2 - 12x = 35$.
3. $-2x^2 + 4x - 3 = 0$.
4. $-3x^2 + 3x + 330 = 0$.
5. $-4x^2 + 96x - 576 = 0$.
6. $x^2 - 8x = -23$.
7. $x^2 - 17x + 52 = 0$.
8. $2x^2 - 18x + 40 = 0$.
9. $2x^2 + 28x + 91 = 0$.
10. $-3x^2 + 3x + 126 = 0$.

Exercice 23. C

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2 + 5x - 6 = 0$.
2. $x^2 + x + 2 = 0$.
3. $-2x^2 + 3x + 4 = 0$.
4. $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
5. $x^2 - 9x + 20 = 0$.
6. $2x^2 - 2x\sqrt{5} + 3 = 0$.
7. $3x^2 + 2x\sqrt{6} - 1 = 0$.
8. $4x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 = 0$.
9. $x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$.
10. $16x^2 - 8x + 13 = 0$.

Exercice 24. E

1. On se propose ici de résoudre l'équation :

$$2x^4 + 3,5x^2 - 1 = 0 \quad (E)$$

   (a) Montrez qu'en posant $X = x^2$, l'équation (E) s'écrit

$$2X^2 + 3,5X - 1 = 0 \quad (E')$$

   (b) Résolvez l'équation (E') d'inconnue X.

   (c) Déduisez-en les solutions de l'équation (E) en utilisant le fait que $X = x^2$.

2. En vous inspirant de la méthode précédente résolvez dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ l'équation :

$$12\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - 10\left(\frac{1}{x-1}\right) + 2 = 0 \quad (F)$$