DEVOIR DE HKBL 2024/05/02

PROBLÈME 1

A 1 a) $\frac{1}{10} \in]-1;1[$ donc la série géométrique $\boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{1}{10^n} \text{ converge}}$.

A 1 b) $\boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{23^n}{n!} \text{ est une série géométrique donc convergente.}}$

A 1 c) $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\boxed{\sum_{n\geq 1} \ln(n) \text{ diverge grossièrement}}$.

A 1 d) On reconnaît une série de Riemann de paramètre $\alpha = 4$

donc : $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} \text{ converge}}$.

A 2 a) $$\frac{3n^4+n}{3n^5+n^4+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3n^4}{3n^5} = \frac{1}{n}.$$

$$\boxed{\frac{3n^4+n}{3n^5+n^4+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

A 3) $-\frac{n}{3^n} \leq \frac{n\sin(\frac{1}{n})}{3^n} \leq \frac{n}{3^n}$.

$\frac{n}{3^n} = o\left(\frac{1}{3n}\right)$ donc, Riemann, convergence absolue puis convergence.

A 2 b) Puisque $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique)

et $\frac{3n^4+n}{3n^5+n^4+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{3n^4+n}{3n^5+n^4+3} \text{ diverge}}$

B 1) Notons $\mathcal{P}(n)$: " $1 \leq u_n \leq e^2$ " pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

* $u_0 = 1$ donc $1 \leq u_0 \leq e^2$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence : $1 \leq u_k \leq e^2$

La fonction racine carrée étant croissante on en déduit :

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{u_n} \leq \sqrt{e^2}$$

i.e. $$1 \leq \sqrt{u_n} \leq e$$

Puisque $e > 0$: $\quad e \times 1 \leq e \times \sqrt{u_n} \leq e \times e$

i.e. $\quad e \leq u_{n+1} \leq e^2$

Enfin comme $1 \leq e$: $\quad 1 \leq u_{n+1} \leq e^2$.

Autrement dit $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

* On a démontré par récurrence sur k que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ 1 \leq u_k \leq e^2.}$$

2 a) ~~Démontrons par~~ ~~Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente : $u_n > 0$. On peut écrire : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\sqrt{u_n}} > 0$~~

Démontrons par récurrence $\mathcal{Q}(n)$: " $u_n \leq u_{n+1}$ ".

* $u_0 = 1$ et $u_1 = e\sqrt{u_0} = e$ donc $u_0 \leq u_1$.

$\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{Q}(k)$, autrement dit

$u_k \leq u_{k+1}$.

En raisonnant comme précédemment on a successivement :

$$\sqrt{u_k} \leq \sqrt{u_{k+1}}$$

$$e\sqrt{u_k} \leq e\sqrt{u_{k+1}}$$

$$u_{k+1} \leq u_{k+2}$$

Ainsi $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.

* On a montré par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$u_k \leq u_{k+1}$.

Autrement dit $\boxed{(u_n)_{n \geq 0} \text{ est croissante.}}$

B2 b) $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par e^2 donc

$(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

B2 c) $x \mapsto e\times\sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc en particulier en $\ell \in [1;e^2]$ et donc, d'après le théorème du point fixe : $\ell = e\sqrt{\ell}$.

On en déduit en élevant au carré : $\ell^2 = e^2\ell$

B2 d) ℓ est solution de l'équation $x^2 = e^2 x$

or cette dernière équivaut à :

$$x^2 - e^2 x = 0$$
$$x(x-e^2) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = e^2$$

donc $\ell \in \{0 ; e^2\}$.

Finalement, puisque $\ell \in [1;e^2]$, $\ell = e^2$.

B3 a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - 2 \\ &= \ln(e\times\sqrt{u_n}) - 2 \\ &= \ln(e) + \ln(u_n^{1/2}) - 2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2 \\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(u_n) - 2\right] \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$.

Autrement dit : (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

B3 b) Puisque $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Or $v_0 = \ln(1) - 2 = -2$ donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = -2 \times \dfrac{1}{2^n}$ et enfin : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -\dfrac{1}{2^{n-1}}}$

B3 c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_n = \ln(u_n) - 2 \iff -\frac{1}{2^{n-1}} = \ln(u_n) - 2$$
$$\iff \ln(u_n) = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$$
$$\iff u_n = \exp\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 2\right)$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \exp\left(-\dfrac{1}{2^{n-1}} + 2\right)}$

B3 d) $2^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ car $2 > 1$

En passant à l'inverse : $\dfrac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Enfin par combinaison linéaire : $-\dfrac{1}{2^{n-1}} + 2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$

Puis, par composition, $\exp\left(-\dfrac{1}{2^{n-1}} + 2\right) \longrightarrow \exp(2)$

Autrement dit : $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^2}$.

C a) $n + 3\ln(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} n$ car $\ln(n) \underset{+\infty}{=} o(n)$

Par produit : $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-1} n\, e^{-n}}$

Par croissance comparée : $n e^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

C b) $\ln(n^2 + 1) = \ln\left[n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\right] = \ln(n^2) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

$= 2\ln(n) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Comme $\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$

On $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\ln(n)\right)$. donc

$$2\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n).$$

Ainsi, par quotient : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{n+1}} = 2\frac{n}{n+1}\times\frac{\ln(n)}{n}$

D'où par croissance comparée et ~~quotient~~ : produit :

$$\boxed{\frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

c ~~d~~) $n!+e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$ car $e^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$

$$2^n+3^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n \quad \text{car} \quad 2^n \underset{n\to+\infty}{=} o(3^n)$$

donc par quotient : $\boxed{\frac{n!+e^n}{2^n+3^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{3^n}}$

On en déduit, par croissance comparée :

$$\boxed{\frac{n!+e^n}{2^n+3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

PROBLÈME 2

A a) $\boxed{\ln(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\infty}$.

A b) $\boxed{e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0}$

A c) $\boxed{\tan(x) \xrightarrow[\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}]{} +\infty}$ et $\boxed{\tan(x) \xrightarrow[\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}]{} -\infty}$

A d) $\boxed{\dfrac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} +\infty}$ et $\boxed{\dfrac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x < 0}]{} -\infty}$.

A e) $k(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{-7x^3}{x^4} = -7 \times \dfrac{1}{x}$

donc $\boxed{k(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$

A f) $k(x) \xrightarrow[x \to 0]{} k(0)$ $\boxed{k(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 2}$

A g) $\dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} +\infty$.

donc, par composition: $\boxed{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} +\infty}$.

A f) $\cancel{\ln}$ $\dfrac{x+1}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$.

puis, par composition, $\boxed{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$.

B 1) * $f(0) = (2 \times 0 + 3)e^{0^2}$

$\boxed{f(0) = 3}$

* $f(1) = (2 \times 1 + 3)e^{1^2}$

$\boxed{f(1) = 5e}$

* $f(-1) = (2 \times (-1) + 3)e^{(-1)^2}$

$\boxed{f(-1) = e}$

6

B2) $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$

B3) $f(1) \neq -f(-1)$ donc f n'est pas impaire.

$f(-1) \neq f(1)$ donc f n'est pas paire.

$\boxed{f \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$

B4) * $x \mapsto 2x+3$ est continue car polynomial.

* $x \mapsto x^2$ est continue donc, par composition, $x \mapsto e^{x^2}$ est continue.

* Enfin par produit $\boxed{f \text{ est continue.}}$

B5) * $x^2 \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$ donc par composition

$e^{x^2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} = +\infty$.

* Comme $2x+3 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $2x+3 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

on en déduit par produit :

$$\boxed{\lim_{\pm\infty} f = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} f = -\infty.}$$

B6) $4x^2 + 6x + 2 = 0$ est une équation polynomial de degré deux avec $a = 4$, $b = 6$ et $c = 2$.

Son discriminant est : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 4 \times 2 = 4$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6 - \sqrt{4}}{2 \times 4} = -1$ et

$x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{4}}{2 \times 4} = -\dfrac{1}{2}$

7

L'ensemble des solutions de l'équation est:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-1 ; -\frac{1}{2}\right\}}$$

B7) Le trinôme du second degré est du signe de son coefficient dominant sauf entre les racines ~~dote~~ $a = 4 > 0$ donc :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2+6x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

B8)

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	$2e^{1/4}$	$\nearrow$	$+\infty$

car $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3\right)e^{(-1/2)^2} = 2e^{1/4}$

B9a) h est affine.
2 est son coefficient directeur
3 est son ordonnée à l'origine.

B9b) $a = 2 > 0$ donc $\boxed{h \text{ est strictement croissante.}}$

B9c) h s'annule ~~en~~ $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$ donc :

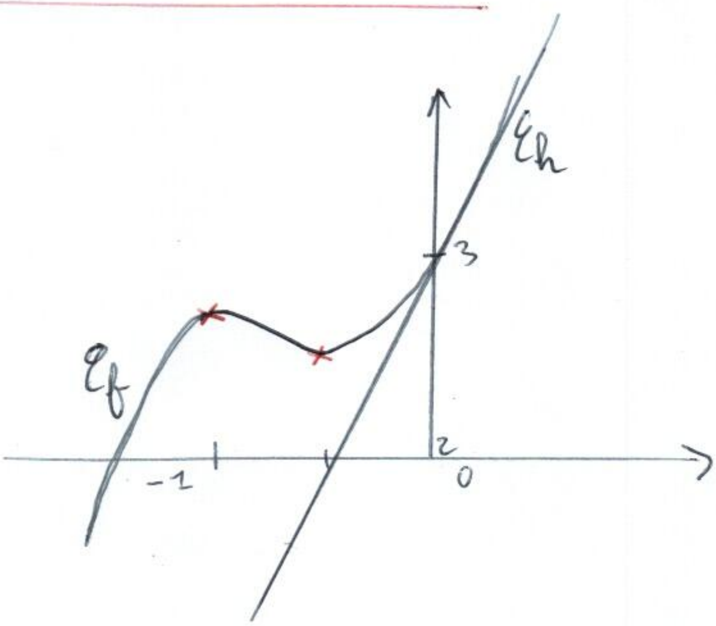
x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

B 9 d) $h(x) = 2 \iff 2x + 3 = 2 \iff 2x = -1$

$\iff x = -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{h(x) = 2 \iff x = -\dfrac{1}{2}}$.

B 10)



C 1) $x \mapsto e^x$ est continue et non nulle donc

$x \mapsto e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ est continue.

Par somme $x \mapsto e^x + e^{-x}$ est continue.

Comme $e^x + e^{-x} > 0$, $\boxed{x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \text{ est continue.}}$

$\boxed{\text{La courbe est d'un seul tenant.}}$

C 2) $g(-x) = \dfrac{1}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \dfrac{1}{e^{-x} + e^x} = g(x)$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0

donc $\boxed{g \text{ est paire.}}$ $\boxed{\mathcal{C}_g \text{ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnés.}}$

C 3)

$e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc

par somme puis quotient : $\boxed{g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$

Par parité $\boxed{g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0}$.

C4a) $g(0) = \dfrac{1}{e^0 + e^{-0}} = \dfrac{1}{2}$. $\boxed{g(0) = \frac{1}{2}}$

C4b) $y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 \geq 0$

Si $y > 0$ alors : $y^2 - 2y + 1 \geq 0$

$$\iff y^2 + 1 \geq 2y$$

$$\iff \frac{y^2+1}{y} \geq 2$$

$$\iff y + \frac{1}{y} \geq 2$$

$$\iff \frac{1}{y + \frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2}$$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

En particulier pour $y = e^x$:

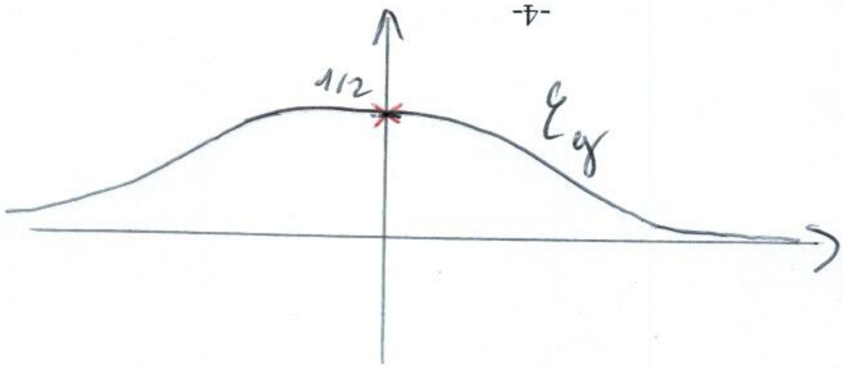
$$\frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} \leq \frac{1}{2}$$

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \leq \dfrac{1}{2}$.

C4c) Des deux questions précédentes on déduit que $\frac{1}{2}$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}_+$ qui est atteint en 0.

Puis par parité : $\boxed{\text{$g$ admet un maximum égal à $\tfrac{1}{2}$ qui est atteint en 0.}}$

C 5



PROBLÈME 3

A 1 a) $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - 0{,}3$

$\boxed{\mathbb{P}(\overline{B}) = 0{,}7}$

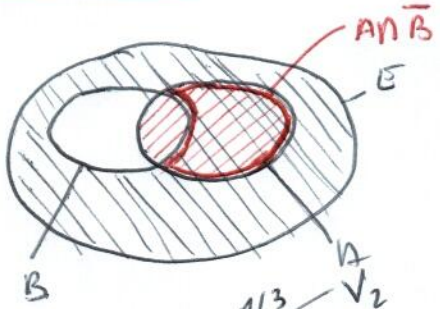
A 1 b) $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}3}$. $\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{2}{3}}$

A 1 c) $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$

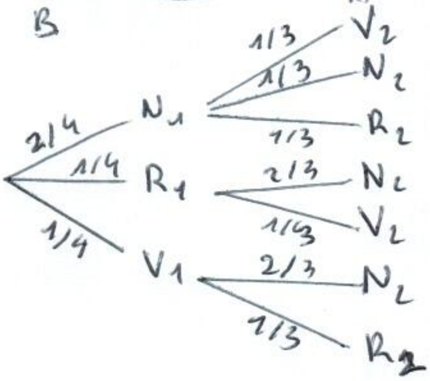
$= 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}2$

$\boxed{\mathbb{P}(A\cup B) = 0{,}6}$

A 2)



B 1 a)



B 1 b) $\boxed{\mathbb{P}(V_1\cap V_2) = 0}$

B 1 c) $\boxed{\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = 0}$

B 1 d) $\mathbb{P}(N_1) > 0$ donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(N_2)$$
$$= \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \cancel{\frac{2}{12}}\ \frac{1}{6}}$$

B 1 e) $\{N_1 ; R_1, V_1\}$ est un système complet d'événements ; donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(N_2) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(R_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(V_1 \cap N_2)$$
$$= \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(N_2) + \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(N_2) + \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}_{V_1}(N_2)$$
$$= \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(N_2) = \frac{1}{2}}$$

B 1 f i) $\boxed{X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}}$

B 1 f ii)

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	1/6	2/3	2/12

B 2 a) $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n$: " n'obtenir que des boules vertes jusqu'au n-ième tirage".

$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$: " obtenir au moins une boule verte parmi les n premiers tirages".

B 2 b) D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n) = \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2 | V_1) \times \dots \times \mathbb{P}(V_n | V_1 \cap \dots \cap V_{n-1})$$

Et puisque les tirages sont indépendants :

$$\mathbb{P}(V_1 \cap \dots \cap V_n) = \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2) \times \dots \times \mathbb{P}(V_n)$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(V_1 \cap \dots \cap V_n) = \frac{1}{4^n}}$$

B2c i) $\boxed{Y(\Omega) = [\![0 ; n]\!]}$

B2c ii) $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(\overline{V_1} \cap \dots \cap \overline{V_n})$

$$= \mathbb{P}(\overline{V_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(\overline{V_n})$$

$$= \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

B2c iii) Si $k=1$ alors $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(V_1) = \frac{1}{4}$.

Si $k \in [\![2 ; n]\!]$ alors

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(\overline{V_1 \cap \dots \cap V_{k-1}} \cap V_k)$$

$$= \mathbb{P}(\overline{V_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(\overline{V_{k-1}}) \times \mathbb{P}(\cancel{\overline{V_k}})$$

$$= \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

Finalement : $\boxed{\forall k \in [\![1 ; n]\!], \quad \mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$

B2c iv) Les $\mathbb{P}(Y=k)$ sont positifs et

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) + \dots + \mathbb{P}(Y=n)$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \dots + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$= 1$$

donc $\boxed{\left(k \,;\, \mathbb{P}(Y=k)\right)_{k\in[\![0,n]\!]} \text{ est une distribution de probabilité.}}$

PROBLÈME 4

A a) $S_1 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3$

$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 5x_3 = 10 \end{cases}$ $\quad L_3 \leftarrow 2L_2 - L_3$

Par substitution :

* $x_3 = \frac{10}{5} = 2$
* $3x_2 + 4 \times 2 = 5 \iff x_2 = -\frac{3}{3} \iff x_2 = -1$
* $x_1 + (-1) + 2 = 4 \iff x_1 = 3$

$\boxed{\text{L'unique solution de } (S_1) \text{ est } (3\,;-1\,;\,2)}$

A b) $(S_2) \iff \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad L_2 \leftarrow 2L_1 - 3L_2$

Par substitution :

* $x_2 = -\frac{1}{5} x_3$
* $3x_1 - \frac{1}{5} x_3 + 2x_3 = 0 \iff 3x_1 = -\frac{9}{5} x_3$

$\iff x_1 = -\frac{3}{5} x_3$

L'ensemble des solutions est donné par la représentation paramétrique :

$$\boxed{S_2 : \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5} t \\ x_2 = -\frac{1}{5} t \\ x_3 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

A c) $S_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ x_2 + 4x_3 = 0 & L_3 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 3x_2 + 4x_3 = 0 & L_4 \leftarrow 2L_1 - L_4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\ 2x_3 = 0 & L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{cases}$

Par substitution:

* $x_3 = 0$
* $x_2 = 0$
* $x_1 = 0$

L'unique solution du système est le vecteur nul.

B 1 a) $\boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17 \\ 112 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 120 \end{pmatrix}}$

B 1 b) $\boxed{-8\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ 72 \end{pmatrix}}$

B 1 c) $6\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28 \\ -69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42 \\ 48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28 \\ -69 \end{pmatrix}$

$\boxed{6\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28 \\ -69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -21 \end{pmatrix}}$

B 1 d) $\begin{pmatrix} 11 \\ \beta \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 + 5\alpha = 2 \\ \beta + 10 = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\frac{9}{5} \text{ et } \beta = -11}$

C 1) $\boxed{f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3}$

C 2) $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{f(1;2) = (4;12;-8)}$

C 3) Par linéarité.

C 4 a) $A \times \begin{pmatrix} +18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (+18) - 3 \times 12 \\ -6 \times (+18) + 9 \times 12 \\ 4 \times (+18) - 6 \times 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{(+18;12) \in \ker(f)}$

C 4 b) Nous en déduisons que:

f n'est pas injective.

C 4 c) $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 - 3 \times 1 \\ -6 \times 1 + 9 \times 1 \\ 4 \times 1 - 6 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +3 \\ -2 \end{pmatrix}$

donc $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $\boxed{(1;1) \notin \ker(f)}$

C 4 d) $\ker(f) \subset \mathbb{R}^2$, mais $\ker(f) \neq \{\vec{0}\}$ car $(18;12) \in \ker(f)$ et $\ker(f) \neq \mathbb{R}^2$ car $(1;1) \notin \ker(f)$

donc: ker (f) est une droite vectoriell.

C 5) (3;2) est un vecteur directeur de ker(f).

17

C8 a) $\begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = 18 \times 1 - 12 \times 1$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = 6}$$

C8 b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

Comme $\begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix} \in \ker(f)$ et que $\ker(f)$ est une droite vectorielle $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \ker(f)}$

C9 a)

$\mathrm{Im}(A)$ est formé des vecteurs $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Or $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

donc
$$\boxed{\mathrm{Im}(A) : \begin{cases} x = 2r - 3t \\ y = -6r + 9t \\ z = 4r - 6t \end{cases}, \quad r, t \in \mathbb{R}.}$$

C9 b)

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = y_1 \\ -6x_1 + 9x_2 = y_2 \\ 4x_1 - 6x_2 = y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = y_1 & \\ 0 = y_2 + 3y_1 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ 0 = 2y_1 - y_3 & L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{cases}$$

Les système est échelonné donc un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Im}(A)$ est:

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) : \begin{cases} 3y_1 + y_2 = 0 \\ 2y_1 - y_3 = 0 \end{cases}}$$