Devoir de HKBL du 2024/05/02.

4 heures. Pas de calculatrice. Sujet volontairement trop long. Faites-en le plus possible.

Problème 1.

Partie A.

Dans cette partie les deux questions sont indépendantes.

1. Déterminez la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

   a) $u_n = \dfrac{1}{10^n}$.
   b) $u_n = \dfrac{23^n}{n!}$.
   c) $u_n = \ln(n)$.
   d) $u_n = \frac{1}{n^4}$.

2. (a) Donnez un équivalent de $\dfrac{3n^4 + n}{3n^5 + n^4 + 3}$.

   (b) Déterminez la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3n^4 + n}{3n^5 + n^4 + 3}$.

3. Étudiez la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{3^n}$.

Partie B.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}$.
On se propose d'étudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de deux manières différentes.

1. Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2.$$

2. (a) Démontrez que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
   (b) Déduisez-en la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant}$ vers un réel que l'on notera ℓ.
   (c) Démontrez que ℓ vérifie $\ell^2 = \mathrm{e}^2 \times \ell$.
   (d) Déterminez ℓ.

3. Pour tout entier naturel n, on pose
$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$
   (a) Démontrez que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   (b) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $v_n = -\dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   (c) Déduisez-en une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
   (d) Calculez la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Partie C.

Trouver un équivalent simple à la suite (u_n) dans les cas suivants et donner si possible sa limite.

a) $u_n = (n + 3\ln(n))\mathrm{e}^{-(n+1)}$.
b) $u_n = \dfrac{\ln(n^2 + 1)}{n + 1}$.
c) $u_n = \dfrac{n! + \mathrm{e}^n}{2^n + 3^n}$.

***

Problème 2.

Partie A.

Déterminez la limite de la fonction k en a dans les cas suivants en justifiant si nécessaire.

a) $k(x) = \ln(x)$ et $a = 0$.

b) $k(x) = \mathrm{e}^x$ et $a = -\infty$.

c) $k(x) = \tan(x)$ et $a = \dfrac{\pi}{2}$.

d) $k(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = 0$.

e) $k(x) = \dfrac{-7x^3 + 2x^2 + 2}{x^4 + x^2 + 1}$ et $a = +\infty$.

f) $k(x) = \dfrac{-7x^3 + 2x^2 + 2}{x^4 + x^2 + 1}$ et $a = 0$.

g) $k(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ et $a = 0^+$.

h) $k(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ et $a = +\infty$.

Partie B.

Soient $f : x \mapsto (2x+3)\,\mathrm{e}^{x^2}$ une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculez l'image de 0 puis 1 puis -1 par f.
2. Donnez sans justification le domaine de définition de f.
3. Déterminez si f est paire ou impaire.
4. Justifiez que la fonction f est continue.
5. Déterminez les éventuelles limites de f en $+\infty$ puis $-\infty$ en expliquant.

On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction définie par

$$f'(x) = (4x^2 + 6x + 2)\,\mathrm{e}^{x^2}.$$

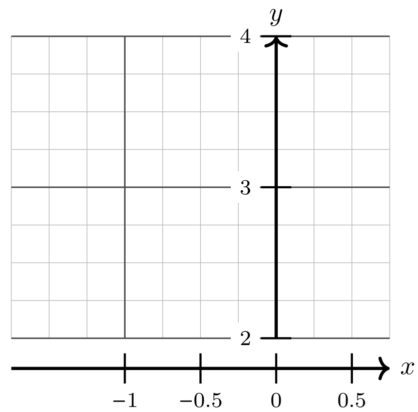
6. Résolvez l'équation $4x^2 + 6x + 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$.
7. Grâce à la question précédente dressez le tableau de signe de la fonction dérivée f'.
8. Recopiez et complétez le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	?	$\nearrow$	?	$\searrow$	?	$\nearrow$	?

9. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x + 3$.
   (a) Quelle est la nature de h ? Comment appelle-t-on 2 et 3 pour cette fonction ?
   (b) Étudiez les variations de h.
   (c) Donnez le tableau de signe de h.
   (d) Déterminez l'ensemble des antécédents de 2 par h.

10. *On admet que* $\mathrm{e} \approx 2,7$ *et* $2\mathrm{e}^{1/4} \approx 2,5$.

    Recopiez le repère ci-dessous puis dessinez les courbes représentatives de f et de h en faisant bien apparaître les informations obtenues aux questions précédentes.



Partie C.

On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifiez que g est continue et donnez-en une interprétation graphique.
2. Démontrez que g est paire et donnez-en une interprétation graphique.
3. Déterminez la limite de g en $+\infty$ et déduisez-en celle en $-\infty$. Là encore, donnez-en une interprétation graphique.
4. On souhaite ici démontrer que g admet un maximum.
   (a) Calculez $g(0)$.
   (b) Montrez que pour tout y réel : $y^2 - 2y + 1 \geqslant 0$.
   Déduisez-en que pour tout $y > 0$ on a $y + \dfrac{1}{y} \geqslant 2$ et finalement que $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2$ pour tout x réel.
   (c) Concluez.
5. En admettant que g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, tracez sur votre copie l'allure de la courbe représentative de g.

***

Problème 3.

Partie A.

Des questions techniques indépendantes les unes des autres.

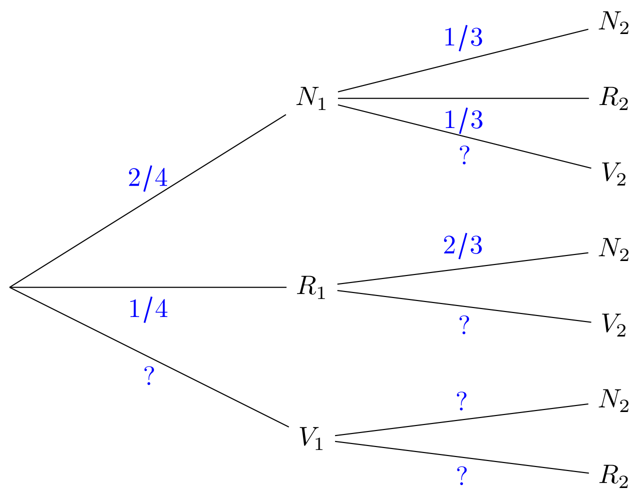
1. Si $\mathbb{P}(A) = 0,5$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2$ calculez
   (a) $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$,
   (b) $\mathbb{P}(A|B)$,
   (c) $\mathbb{P}(A \cup B)$.
2. Avec un diagramme de Venn (diagramme patates) illustrez ce qu'est l'ensemble $A \cap \overline{B}$.

Partie B.

Dans la suite on considère une urne contenant 2 boules noires, 1 boule verte et 1 boule rouge.

1. **Deux tirages sans remise.**
   Dans cette question on tire successivement deux boules de l'urne sans les remettre dans l'urne.

   (a) Recopiez et complétez sur votre copie l'arbre pondéré dessiné ci-dessous.



   (b) Déterminez la probabilité d'obtenir deux boules vertes.

   (c) Donnez la probabilité d'obtenir une boule noire au second tirage sachant qu'on a obtenu une boule rouge au premier tirage.

   (d) On note C l'événement « obtenir 2 boules noires ».
   Calculez $\mathbb{P}(C)$.

   (e) Calculez la probabilité d'obtenir une boule noire au second tirage.

   (f) On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules noires obtenues lors des deux tirages.

      i. Donnez $X(\Omega)$, le support de la variable aléatoire X.

      ii. Donnez la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. **n tirages avec remise.**
   On suppose maintenant qu'on tire successivement n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) boules de l'urne en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.
   Les tirages sont supposés indépendants les uns des autres et les probabilités d'obtenir une boule ne sont pas modifiées à chaque tirage.

   On note V_i l'événement « obtenir une boule verte au i-ième tirage ».

   (a) Interprétez par une phrase en français les événements :

      i. $V_1 \cap V_2 \cap \dots V_n$,

      ii. $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$.

   (b) Démontrez que $\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n) = \dfrac{1}{4^n}$.

(c) On note Y la variable aléatoire qui aux n tirages associe le rang de la première boule verte obtenue ou 0 si la boule verte n'est pas obtenue.

i. Donnez le support (univers-image) de Y.

ii. Calculez $\mathbb{P}(Y=0)$.

iii. Calculez, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(Y=k)$.

iv. Vérifiez que les $(k, \mathbb{P}(Y=k))$, pour $k \in [\![0,n]\!]$, forment bien une loi (ou distribution) de probabilité de variable aléatoire.

***

Problème 4.

Partie A.

Résolvez les systèmes avec la méthode du pivot de Gauss.

a) $(S_1) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$.

b) $(S_2) : \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

c) $(S_3) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$.

Partie B.

1. Effectuez les calculs suivants.
   (a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17 \\ 112 \end{pmatrix}$.
   (b) $-8\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$.
   (c) $6\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28 \\ -69 \end{pmatrix}$.
2. Déterminez tous les réels α et β tels que $\begin{pmatrix} 11 \\ \beta \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Partie C.

On considère une application linéaire f dont la matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

1. Précisez les ensembles de départ et d'arrivée de f.
2. Calculez $f(1;2)$.
3. Expliquez sans calcul pourquoi $f(3\cdot(4;2)+(1;-6)) = 3f(4;2) + f(1;-6)$.
4. (a) Montrez que $(18;12) \in \ker(f)$.
   (b) Que pouvez-vous en déduire concernant f ?
   (c) Montrez que $(1;1) \notin \ker(f)$.
   (d) Déduisez des questions précédentes que le noyau est une droite vectorielle.

5. Donnez sans justification un vecteur directeur de $\ker(f)$.
6. Résolvez le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \\ -6x_1 & + & 9x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

7. Donnez une représentation paramétrique ainsi qu'un système d'équations cartésiennes de $\ker(f)$.
8. (a) Calculez le déterminant $\begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix}$.
   (b) Que pouvez-vous en déduire pour le vecteur $(1;1)$?
9. (a) Donnez une représentation paramétrique de $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Donnez un système d'équations cartésiennes définissant $\mathrm{Im}(f)$.

***