DEVOIR HKBL 2024/04/19

Exercice 1

1) $g(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{-3x^2}{x^2} = -3$ donc $\boxed{g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -3}$

De même $\boxed{g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -3}$

$\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -3$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2 a) $f(x) = 0 \iff x^2 - 5x + 3 = 0$

f est un trinôme du second degré dont les coefficients sont : $a = 1$, $b = -5$ et $c = 3$.

Son discriminant est donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 13$

$\Delta > 0$ donc f admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

et $x_2 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{13}}{2 \times 1}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\{\alpha ; \beta\}$.

2 b) $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ d'après la question précédente

donc :

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$x - \alpha$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - \beta$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3a) * $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} -3x^2 - 1 = -3\alpha^2 - 1 < 0$

* D'après la question précédente :

$$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} x^2 - 5x + 3 = 0^+$$

* Des deux points précédents on déduit par quotient :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} g(x) = -\infty}$$

3b) De même, et puisque : $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} x^2 - 5x + 3 = 0^-$,

$$\boxed{g(x) \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}]{} +\infty}$$

4) $\boxed{g(x) \xrightarrow[\substack{x \to \beta \\ x < \beta}]{} -\infty \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[\substack{x \to \beta \\ x > \beta}]{} +\infty}$

5)

x	$-\infty$			β		?		$\cancel{\alpha}$ α		$+\infty$
g	-3	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	?	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-3

Exercice 2

1) * $\sum_n n^{-5}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 5 > 1$

donc $\boxed{\sum_n n^{-5} \text{ converge}}$.

* $\ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $\boxed{\sum_n \ln(n) \text{ diverge grossièrement}}$.

* $\sum_n 0{,}1^n$ est une série géométrique de raison $0{,}1 \in]-1;1[$

donc $\boxed{\sum_n 0{,}1^n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} 0{,}1^n = \frac{1}{1-0{,}1}}$

* $\sum_n \frac{1}{n!}$ est la série exponentielle donc

$\boxed{\sum_n \frac{1}{n!} \text{ converge et } \sum_n \frac{1}{n!} = e^1}$

2) * $u_1 = \frac{(-1)^1 \times 1^5 \times \ln(1)}{1!}$ donc $\boxed{u_1 = 0}$

* $u_2 = \frac{(-1)^2 \times 2^5 \times \ln(2)}{2!}$ donc $\boxed{u_2 = 16 \ln(2)}$

3a) Par croissances comparées :

$$\boxed{\frac{n^7}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\ln(n)}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

3b) De la question précédente on déduit par produit :

$$\frac{n^7}{n!} \times \frac{\ln(n)}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Or $\frac{n^7}{n!} \times \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{n^5 \ln(n)}{n!}$ donc :

$$\boxed{\frac{n^5 \ln(n)}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

3c) On en déduit que $\boxed{\sum_n \frac{n^5 \ln(n)}{n!}}$ ne diverge pas grossièrement.

On ne peut rien en déduire d'autre.

4) a)

$$v_n = \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} (n+1)^5 \ln(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^n n^5 \ln(n)}{n!}} \right|$$

$$= \frac{(n+1)^5 \ln(n+1)}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^5 \ln(n)}$$

$$= \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{(n+1)^5}{n^5} \times \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \times \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$

$$\boxed{v_n = \frac{1}{n+1} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \times \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}}$$

4) b) * Par quotient $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

* $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc, par composition:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1^5 = 1$$

* Des points précédents nous déduisons par produit:

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.}$$

4c) $$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln(n)}$$
$$= \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$
$$= 1 + \frac{1}{\ln(n)} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Or $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

On en déduit $\frac{1}{\ln(n)} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Finalement : $\boxed{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

4d) Par produit, et d'après les questions précédentes :

$$\frac{1}{n+1} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \times \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

autrement dit : $\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

4e) • $(u_n)_{n\geq 2}$ est à termes strictement positifs,

• $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

donc, d'après la règle de d'Alembert :

$$\boxed{\sum_{n\geq 2} |u_n| \text{ converge.}}$$

5) D'après la question précédente $\sum_{n\geq 2} u_n$ est absolument convergente donc :

$$\boxed{\sum_{n\geq 2} u_n \text{ converge.}}$$

Exercice 3

1) $\boxed{\Omega = \{P ; F\}^2 = \{PP ; PF ; FP ; FF\}}$.

D'après la formule des probabilités composées, et puisque $\mathbb{P}(P) = p > 0$:

$$\mathbb{P}(PP) = \mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}(P \mid P)$$
$$= p \times p \quad \text{car les lancers sont indépendants.}$$

$\boxed{\mathbb{P}(PP) = p^2}$

De même : $\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{P}(PF) = \mathbb{P}(FP) = p(1-p) \\ \mathbb{P}(FF) = (1-p)^2 \end{array}}$

2) $\boxed{S_2(\Omega) = \{-20 ; 1 ; 22\}}$

3)

s_2	-20	1	22
$\mathbb{P}(S_2 = s_2)$	$(1-p)^2$	$2(1-p)p$	p^2

Car : $* \ \mathbb{P}(S_2 = -20) = \mathbb{P}(FF) = (1-p)^2$

$* \ \mathbb{P}(S_2 = 22) = \mathbb{P}(PP) = p^2$

$* \ \mathbb{P}(S_2 = 1) = \mathbb{P}(PF) + \mathbb{P}(FP) = 2(1-p)p$.

4) $* \ \mathbb{P}(S_2 \leq 1) = \mathbb{P}(S_2 = -20) + \mathbb{P}(S_2 = 1)$

$$= (1-p)^2 + 2(1-p)p$$

$\boxed{\mathbb{P}(S_2 \leq 1) = (1-p)(1+p)}$

$* \ \mathbb{P}(S_2 < -2) = \mathbb{P}(S_2 = -20)$

$\boxed{\mathbb{P}(S_2 < -2) = (1-p)^2}$

Exercice 4

1) $\begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

donc f est l'application associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent : $\boxed{f \text{ est une application linéaire.}}$

2) *

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$

d'où : $\boxed{\ker f : \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} t \\ x_2 = \frac{5}{4} t \\ x_3 = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.}$

3) $\ker(f) \neq \{\vec{0}\}$ donc f n'est pas injective.

4) $E = \ker(f)$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.