Devoir de HKBL du 2024/04/19.

2 heures. Pas de calculatrice.

Exercice 1.

Soient $f : x \mapsto x^2 - 5x + 3$ et $g : x \mapsto \dfrac{-3x^2 - 1}{x^2 - 5x + 3}$.

1. Déterminez, en justifiant, les éventuelles limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$. Puis donnez, si possible, une interprétation graphique de votre réponse.
2. (a) Déterminez les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   Dans la suite on notera $\alpha = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ *et* $\beta = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$.
   (b) Étudiez le signe de f sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Déduisez de la question précédente la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers α en prenant des valeurs supérieurs.
   (b) Même question pour des valeurs inférieures.
4. Étudiez la limite de g au voisinage de β.
5. Recopiez et complétez le tableau de variation suivant avec les informations des questions précédentes :

x	$-\infty$		β		$?$		α		$+\infty$
g	$?$	$\searrow$	$? \;\Vert\; ?$	$\searrow$	$?$	$\nearrow$	$? \;\Vert\; ?$	$\nearrow$	$?$

***

Exercice 2.

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n n^5 \ln(n)}{n!}$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} u_n$.

1. *Une question de cours indépendante du reste de l'exercice.* Donnez la nature des séries suivantes en justifiant : $\displaystyle\sum_n n^{-5}$, $\displaystyle\sum_n \ln(n)$, $\displaystyle\sum_n 0,1^n$ et $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n!}$ puis précisez si possible la somme.
2. Calculez u_1 et u_2.

3. (a) Déterminez les limites des suites de termes généraux : $\dfrac{n^7}{n!}$ et $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$.
   (b) Déduisez de la question précédente la limite de la suite de terme général $\dfrac{n^5\ln(n)}{n!}$.
   (c) Que peut-on en déduire pour la série $\displaystyle\sum_n \frac{n^5\ln(n)}{n!}$.
4. On note $v_n = \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.
   (a) Montrez que $v_n = \dfrac{1}{n+1} \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^5 \times \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$ pour tout $n \geqslant 2$.
   (b) Déterminez la limite de $\dfrac{1}{n+1} \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^5$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Montrez que $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$ et déterminez la limite de $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (d) Déduisez des questions précédentes la limite de $(v_n)_{n\geqslant 2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (e) Concluez quant à la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} |u_n|$.
5. Concluez quant à la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

***

Exercice 3.

On lance une pièce déséquilibrée dont la probabilité d'obtenir pile est un nombre $p \in]0;1[$.

On lance deux fois la pièce. Lorsqu'on obtient pile on gagne 11 euros sinon on perd 10 euros. On note S_2 la variable aléatoire comptant la somme gagnée ou perdue au total au terme des deux lancers.

1. Modélisez l'expérience : donnez un univers et la probabilité de chacune des issues (en détaillant les calculs).
2. Donnez le support de la variable aléatoire (*i.e.* l'univers image) $S_2(\Omega)$.
3. Donnez la loi de probabilité de S_2 sous forme d'un tableau.
4. Calculez $\mathbb{P}(S_2 \leqslant 1)$ et $\mathbb{P}(S_2 < -2)$.

***

Exercice 4.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \; ; \; 3x_1 + x_2 - 2x_3 \; ; \; 6x_1 - 2x_2 + x_3).$$

1. Démontrez que f est une application linéaire.
   Dans la suite on notera A la matrice associée à l'application linéaire f.
2. Résolvez le système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ et déduisez-en une représentation paramétrique de $\ker(f)$.
3. f est-elle injective ?
4. Justifiez que l'ensemble $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \text{ et } 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \text{ et } 6x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

***