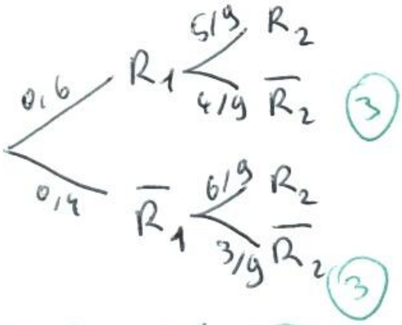
Éléments de correction du devoir du 2024/02/15.

Problème 1 / 87

A 1. (a) Loi uniforme finie (équiprobabilité). 3

A 1. (b) Il y a équiprobabilité de tirage entre les boules, or 6 des 10 boules de l'urne sont rouges donc : 3 $\boxed{\mathbb{P}(R_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}}$

A 2.



A 3. (a) $\boxed{\mathbb{P}(R_1) = 0,6}$ 3

A 3. (b) $\boxed{\mathbb{P}(R_2 | \overline{R_1}) = \frac{6}{9}}$ 3

A 4. (a) $R_1 \cap R_2$: " obtenir une boule rouge au premier et au deuxième tirages". 3

A 4. (b) Formule des probabilités composées. 3

A 4. (c) $\mathbb{P}(R_1) \neq 0$, donc, d'après la formule des probabilités composées : 1
$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2 | R_1)$$
$$= 0,6 \times \frac{5}{9} \quad 3$$

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{3}} \quad 3$$

A 5 $\{R_1 ; \overline{R_1}\}$ est un système complet d'événements et 1 $\mathbb{P}(R_1) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{R_1}) \neq 0$ donc, d'après la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2 | R_1) + \mathbb{P}(\overline{R_1}) \times \mathbb{P}(R_2 | \overline{R_1}) \quad 1$$
$$= 0,6 \times \frac{5}{9} + 0,4 \times \frac{6}{9} \quad 3$$

$$\boxed{\mathbb{P}(R_2) = 0,6}$$

A 6
$$\mathbb{P}(R_1 | R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{\frac{1}{3}}{0,6} = \frac{10}{18} \quad 1$$

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1 | R_2) = \frac{5}{9}} \quad 3$$

B1. $\boxed{\Omega = \{R, N\}^{\mathbb{N}^*}}$ 1

B2. $\boxed{\mathbb{P}(R_1) = 0,6 \text{ (3)} ; \ \mathbb{P}_{R_1}(R_2) = 0,6 \text{ (3)} ; \ \mathbb{P}(R_2) = 0,6 \times 0,6 + 0,4 \times 0,6 = 0,6}$ 3

B.3. $\mathbb{P}(R_i) = 0,6 \neq 0$ donc d'après la formule des probabilités composées:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_n) \\ &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2 | R_1) \times \dots \times \mathbb{P}(R_n | R_1 \cap \dots R_{n-1}) \\ &= \underbrace{0,6 \times 0,6 \times \dots \times 0,6}_{n \text{ fois}} \end{aligned}$$

2

$$\boxed{\mathbb{P}(E_n) = 0,6^n}$$

B.4. $(\mathbb{P}(E_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $0,6 \in]-1;1[$

donc $\boxed{\mathbb{P}(E_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$ 3

B5. La probabilité que l'on n'obtienne que des boules rouges se rapproche de 0. 2

C2. $p_2 = \mathbb{P}(R_1) = 0,6$ 2

C3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\{S_n ; \overline{S_n}\}$ est un système complet d'événements, $\mathbb{P}(S_n) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{S_n}) \neq 0$ donc, d'après la formule des probabilités 1 totales:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(S_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(S_n) \times \mathbb{P}(S_{n+1} | S_n) + \mathbb{P}(\overline{S_n}) \times \mathbb{P}(S_{n+1} | \overline{S_n}) \quad \text{(1)} \\ &= p_n \times 0,6 + (1 - p_n) \times 0,2 \quad \text{(3)} \\ &= 0,4\, p_n + 0,2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{4}{10} p_n + \frac{2}{10}}$$

C4. $p_3 = \frac{4}{10} p_2 + \frac{2}{10} = \frac{4}{10} \times 0,6 + \frac{2}{10}$ donc $\boxed{p_3 = 0,44}$ 3

2

C5.(a) p_n est une probabilité donc $p_n \in [0;1]$.

$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée.}}$ 3

C5.(b) * $p_2 = 0,6$ et $p_1 = 1$ donc $p_0 \geqslant p_1$. 3

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $p_n \geqslant p_{n+1}$. 3

Puisque $0,4 > 0$:

$$0,4\, p_n \geqslant 0,4\, p_{n+1}$$

$$0,4\, p_n + 0,2 \geqslant 0,4\, p_{n+1} + 0,2$$

2

$$p_{n+1} \geqslant p_{n+2}$$

* On a démontré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n \geqslant p_{n+1}}$

C5.(c) On en déduit que : $\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$ 3

C5.(d) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée donc

$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$ 3

C5.(e) $p_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\frac{4}{10} p_n + \frac{2}{10} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{10}\ell + \frac{2}{10}$

donc : $\ell = \frac{4}{10}\ell + \frac{2}{10}$. 1

Cette équation équivaut successivement à :

$$\ell - \frac{4}{10}\ell = \frac{2}{10}$$

$$\frac{6}{10}\ell = \frac{2}{10}$$

3

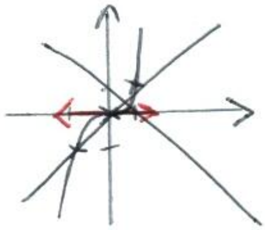
$$\ell = \frac{2}{10} \times \frac{10}{6}$$

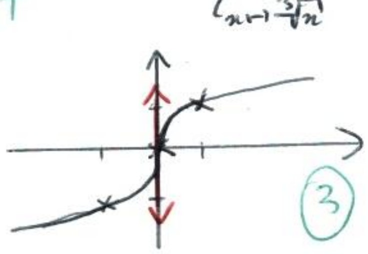
$$\boxed{\ell = \frac{1}{3}}$$

3

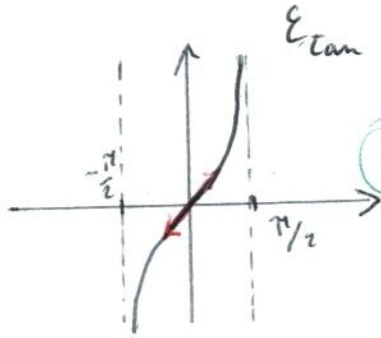
Problème 2 / 157

A.1.

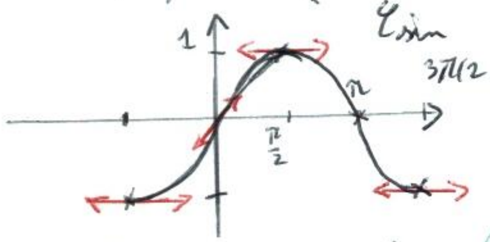




3



3



3

A2. La fonction carré. 3

A3. La fonction carré. 3

A4. La fonction cube. 3

A5. La fonction nulle. 3

A6. Inverse : $\mathbb{R}^*$. 3

Racine carrée : $\mathbb{R}_+$. 3

Logarithme népérien : $\mathbb{R}_+^*$ 3

Exponentielle : $\mathbb{R}$. 3

A7. Strictement croissante : exponentielle sur $\mathbb{R}$. 3

Décroissante : inverse sur $\mathbb{R}_-^*$ 3

Non monotone : carré sur $\mathbb{R}$. 3

A8.(a) $\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. 3

A8.(b) $\frac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} +\infty$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x<0}]{} -\infty$. 3

A8.(c) $3x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ 3

A8.(d) $\ln(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\infty$ 3

A8.(e) $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ 3

A8.(f) $\tan x \xrightarrow[\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}]{} -\infty$ 2

A9

x	0	$+\infty$
$\ln$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3

A10 (a) f est une fonction affine. 3

A10 (b) -2 est le coefficient directeur de f. 3

1 est l'ordonnée à l'origine de f. 3

A10 (c) $a = -2 < 0$ donc f est strictement décroissante. 3

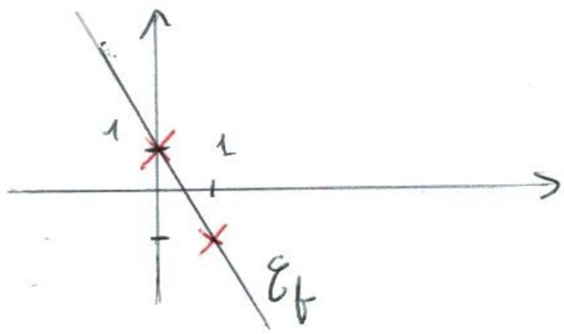
A10 (d) $f(8) = -2 \times 8 + 1 = -15$ 3

A10 (e) $f(x) = 10 \iff -2x + 1 = 10$

$\iff -2x = 9$

$\iff x = -\frac{9}{2}$ 2

A10 (f)



2

A11 (a) g est un trinôme de degré 2 avec $a = 2$, $b = -8$ et $c = 6$. ~~donc~~ On $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 64 - 48 = 16$, donc, puisque $\Delta > 0$, il y a deux zéros distincts :

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2 \times 2} = 3$$

2

A11 (b) $g(x) = 2(x-1)(x-3)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1

A11(c) $g(x) = -2 \iff 2x^2 - 8x + 6 = -2 \iff 2x^2 - 8x + 8 = 0$ 1

$\iff 2(x^2 - 4x + 4) = 0 \iff 2(x-2)^2 = 0 \iff x = 2$.

5

B 1. Valeurs interdites : -7 et 0. 2

$\mathcal{D}_h =]-\infty\,; -7[\cup]-7\,; 0[\cup]0\,; +\infty[$. 1

B2. $h(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 2$ 3 ; $h(x) \xrightarrow[x \to 7]{} -\infty$ 3

$h(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x < 0}]{} -\infty$ 3 ; $h(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} +\infty$ 3

$h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ 3

B3. $\mathcal{E}_h$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 2$. 2

$\mathcal{E}_h$ admet deux asymptotes verticales d'équations $x = -7$ 2 et $x = 0$. 2

B4. $\mathcal{E}_h$ semble admettre une tangente horizontale au point d'abscisse $-3{,}5$. 1

B5. h n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$. 1

h " " " $]-7\,; 0[$ 1

h est strictement croissante sur $[2\,; +\infty[$ 1

B6. Le maximum de h sur $]-7\,; 0[$ est $1{,}4$ 3, et il est atteint en $-3{,}5$.

B 7. h n'admet pas de borne inférieure. 1

C 1.(a) $\ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ 3

C 1.(b) $e^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ 3

C 1.(c) $2^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ 3

C 1.(d) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ 3

C 1.(e) $n^4 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ 3

C 1.(f) $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ 3

C1.(g) $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ 3

C1.(h) $\sqrt[3]{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ 3

C2.(a) $\dfrac{n^4}{3n^7} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ 2

C2.(b) $-7n^8+5n^6 \underset{n\to+\infty}{\sim} -7n^8 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ 2

C2.(c) $\dfrac{-3n^2+n+2}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -3$ 2

C2.(d) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ 2

C2.(e) $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ 1

C2-(f) $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\times 2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ 1

C2.(g) $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ 1

C3.(a) $\ln(n^3+n) = \ln\left[n^3\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\right]$

$= \ln(n^3) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$

$= 3\ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ 1

C3.(b) $\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ 2

C3.(c) * $n = o(n^2)$

* $\ln(n) = o(n^2)$

* $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{n^2}}{n^2}$ d'après la question précédente donc : $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ 1

d'où $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = o(n^2)$

* En sommant : $n - 3\ln(n) - \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = o(n^2)$ 7

C.3.(d) De la question précédente on déduit :

$$n^2+n-\ln(n^3+n) = n^2+n-3\ln(n)-\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ 1

Problème 3 /56

2. * $0+3\times 0=0$ donc $\vec{0}\in K$. 3
   * $-6+3\times 2=0$ donc $\vec{y}\in K$. 3
   * $5+3\times 3=14$ donc $\vec{z}\notin K$ 3

3. * $\vec{0}\in K$
   * $K\subset\mathbb{R}^2$
   * Soient $\lambda\in\mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v}\in K$. 2

$$\lambda\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}\lambda u_1+v_1\\ \lambda u_2+v_2\end{pmatrix}.$$

$$[\lambda u_1+v_1]+3\times[\lambda u_2+v_2] = \lambda(u_1+3u_2)+(v_1+3v_2)$$
$$= \lambda\times 0+0$$
$$= 0$$

* Donc : K est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

4. $\vec{y}+\vec{z}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ 3 ; $8\vec{y}=\begin{pmatrix}-48\\16\end{pmatrix}$ 3 ; $7\vec{y}-9\vec{z}=\begin{pmatrix}-87\\-13\end{pmatrix}$ 3.

5.(a) $\det(\vec{y};\vec{z})=\begin{vmatrix}-6 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -6\times 3-2\times 5=-28$. 2

5.(b) $\det(\vec{y};\vec{z})\neq 0$ donc $\vec{y}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires. 1

6.(a) * $K\subset\mathbb{R}^2$
   * $K\neq\mathbb{R}^2$ car ~~$\vec{z}\neq\vec{0}$~~ ~~et~~ $\vec{z}\notin K$. 1
   * $K\neq\{\vec{0}\}$ car $\vec{y}\neq\vec{0}$ et $y\in K$.

6.(b) K : $x+3y=0$. 1

6.(c) $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \in K$ (car $-3+3\times 1 = 0$) 1

donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de K.

6.(d) $K : \begin{cases} x_1 = -3t \\ x_2 = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. 2

7.(a) * $f(0;1) = (0+3\times 1 \,;\, 2\times 0+6\times 1 \,;\, 3\times 0 + 9\times 1)$

$= (3 \,;\, 6 \,;\, 9)$ 3

* $f(1;0) = (1+3\times 0 \,;\, 2\times 1+6\times 0 \,;\, 3\times 1+9\times 0)$

$= (1 \,;\, 2 \,;\, 3)$ 3

* $f(-3;1) = (-3+3\times 1 \,;\, 2\times(-3)+6\times 1 \,;\, 3\times(-3)+9\times 1)$ 3

$= (0 \,;\, 0 \,;\, 0)$

7.(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 3

7.(c) f est donc une application linéaire. 2

7.(d) $f(2(0;1)+(-3;1)) = 2f(0;1) + f(-3;1)$

car f est linéaire. D'après 7.(a) :

$f(2(0;1)+(-3;1)) = 2\times(3;6;9) + (0;0;0)$ 1

$f(2(0;1)+(-3;1)) = (6 \,;\, 12 \,;\, 18)$.

7.(e) $M\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 4+3\times 1 \\ 2\times 4+6\times 1 \\ 3\times 4+9\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}$ 3

7.(f) $\cancel{M \times (4}$ $M(\vec{y}) = M\times\vec{y} = M\times\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times(-6)+3\times 2 \\ 2\times(-6)+6\times 2 \\ 3\times(-6)+9\times 2 \end{pmatrix}$

$M(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 3

9

7.(g) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 0 = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$ 1

7.(h) L'ensemble des antécédents de $\vec{0}$ par f est la droite vectorielle K d'équation cartésienne $x + 3y = 0$ 1

8.(a) $N = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à g 2

donc g est une application linéaire.

8.(b) * $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 + x_3 = 7 \\ x_2 = 2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 5 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$

$\mathcal{S} = \{ (3 ; 2 ; 5) \}$ 2

* $(3 ; 7 ; 8)$ admet un unique antécédent par g à savoir $(3 ; 2 ; 5)$.

8.(c) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 10 \\ x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 2 \end{cases}$ 1

10