Devoir de HKBL du 2024/02/15.

4 heures. Pas de calculatrice.

Problème 1.

Un jeu est organisé à partir d'un sac contenant 6 jetons rouges et 4 jetons noirs. Les jetons sont indiscernables au toucher.

Partie A.

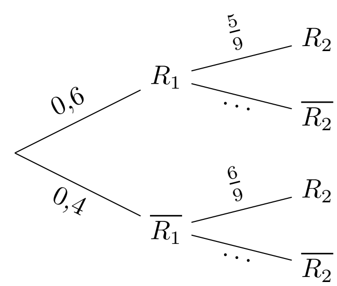
Dans cette partie, un joueur prend deux jetons au hasard dans le sac selon le déroulé suivant :

- le joueur prend un premier jeton au hasard dans le sac et il met le jeton de côté ;
- le joueur prend un second jeton au hasard dans le sac et il met le jeton de côté.

On note :

- R_1 l'événement « le premier jeton tiré est de couleur rouge » ;
- R_2 l'événement « le second jeton tiré est de couleur rouge ».

1. (a) Quelle est la loi de probabilité qui permet de calculer la probabilité que le premier jeton soit rouge ?
   (b) Calculez la probabilité que le premier jeton soit rouge.
2. Recopiez et complétez l'arbre suivant sur votre copie.



3. Aucune justification n'est attendue pour cette question.
   (a) Donnez la probabilité de R_1.
   (b) Donnez la probabilité que le deuxième jeton soit rouge sachant que le premier est noir.
4. (a) Décrivez par une phrase en français l'événement $R_1 \cap R_2$.
   (b) Quel est le nom de la formule adaptée au calcul de $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$?
   (c) Calculez la probabilité de l'événement $R_1 \cap R_2$.
5. Montrez que la probabilité que le second jeton soit rouge est de $0,6$. Quel est le nom de la formule de probabilité qui permet ce calcul ?
6. Calculez la probabilité que le premier jeton soit rouge sachant que le second est rouge.

Partie B.

Dans cette partie le joueur prend un premier jeton au hasard dans le sac et il remet le jeton dans le sac. Puis il prend un second jeton au hasard dans le sac et il remet le jeton dans le sac. Il recommence indéfiniment ce tirage avec remise.

On note E_n l'événement « tous les jetons jusqu'au n-ième sont rouges ».

1. Proposez, sans justifier, un univers pour cette expérience aléatoire.
2. Donnez, sans justifier $\mathbb{P}(R_1)$, $\mathbb{P}_{R_1}(R_2)$, $\mathbb{P}(R_2)$.
3. Justifiez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E_n) = (0,6)^n$.
4. Étudiez la convergence de la suite $(\mathbb{P}(E_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Interprétez ce dernier résultat.

Partie C.

On considère maintenant deux sacs. Le premier sac contient toujours 6 jetons rouges et quatre jetons noirs. Le second sac, lui, contient 2 jetons rouges et 8 jetons noirs.

Au début, on prend un jeton dans le premier sac, on note sa couleur et on le remet dans le premier sac.

Puis on procède à des tirages successifs : si le jeton tiré lors du précédent tirage est rouge, on prend un jeton dans le premier sac, on note sa couleur et on le remet dans le premier sac. Si par contre le jeton tiré à l'étape précédente est noire, on prend un jetons dans le second sac on note sa couleur et on le remet dans le second sac.

On note S_n l'évènement « le tirage a lieu dans le premier sac à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

2. Justifiez que $p_2 = 0,6$.
3. Montrez que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \dfrac{4}{10}p_n + \dfrac{2}{10}$.
4. Calculez p_3.
5. (a) Justifiez sans calcul que la suite (p_n) est bornée.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel non nul, $p_n \geqslant p_{n+1}$.
   (c) Que peut-on déduire de la question précédente à propos de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   (d) Démontrez que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.
   (e) Justifiez que ℓ vérifie l'équation : $\ell = \dfrac{4}{10}\ell + \dfrac{2}{10}$. En déduire la valeur de ℓ.

***

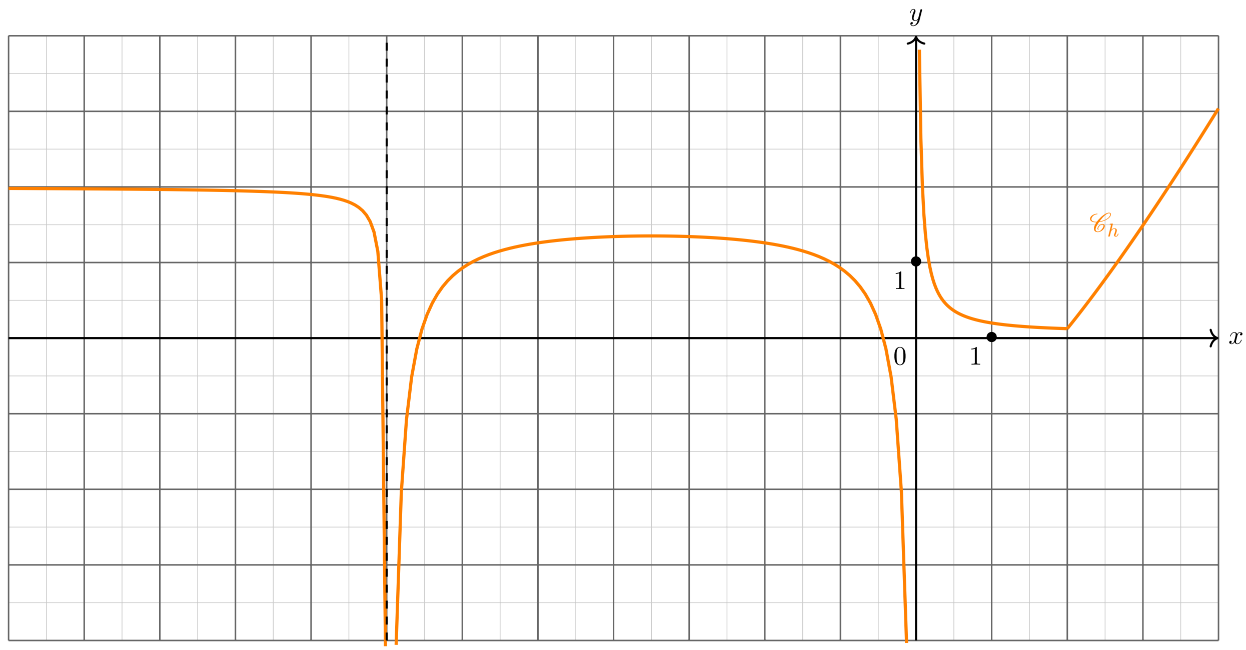
Problème 2.

Partie A.

1. Dessinez à main levée les courbes représentatives des fonctions racine cubique, tangente et sinus.
2. Donnez un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui n'est pas monotone.
3. Donnez un exemple de fonction qui soit paire.
4. Donnez un exemple de fonction qui soit impaire.
5. Donnez un exemple de fonction (de référence par exemple) qui soit à la fois paire et impaire.
6. Donnez les domaines de définition des fonctions inverse, racine carrée, logarithme népérien et exponentielle.
7. Donnez un exemple de fonction strictement croissante, un autre de fonction décroissante, et enfin, un dernier d'une fonction non monotone.
8. Donnez, sans justifier, les limites suivantes.
   (a) Limite de exponentielle en $-\infty$.
   (b) Limite d'inverse en 0.
   (c) Limite de $x \mapsto 3x$ en $+\infty$.
   (d) Limite de ln en 0.
   (e) Limite de racine carrée en 0.
   (f) Limite de tangente en $-\frac{\pi}{2}$ par valeurs supérieures.
9. Dressez le tableau de variation de la fonction ln.
10. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$.
    (a) Quelle est la nature de la fonction f ?
    (b) Quel est le nom générique des nombres -2 et 1 apparaissant dans l'expression algébrique de f ?
    (c) Étudiez les variations de f.
    (d) Calculez $f(8)$.
    (e) Déterminez les antécédents de 10 par f.
    (f) Tracez une courbe représentative de f dans un repère.
11. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$.
    (a) Déterminez les zéros de la fonction g, autrement dit résolvez l'équation $g(x) = 0$.
    (b) Déduisez-en, une résolution de l'inéquation $g(x) > 0$.
    (c) Déterminez les antécédents de -2 par la fonction g (en résolvant une équation).

Partie B.

On donne ci-dessous la représentation graphique de h.



Répondez aux questions qui suivent en vous appuyant sur cette représentation graphique.

1. Donnez les valeurs interdites de h puis déduisez-en le domaine de définition de h.
2. Donnez les limites de h aux bornes de son domaine de définition (em particulier "autour" des valeurs interdites).
3. Déduisez-en les asymptotes à la courbe représentative de h en précisant leurs équations.
4. En quelle abscisse la courbe représentative de h semble-t-elle admettre une tangente horizontale ?
5. h est-elle monotone sur $\mathbb{R}$? sur $]-7;0[$? sur $[2,+\infty[$?
6. Quel est le maximum de h sur $]-7;0[$?
7. h admet-t-elle une borne inférieure ?

Partie C.

Dans cette partie on s'intéresse aux limites de suites.

1. Donnez les limites, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites de références dont on donne le terme général, en justifiant si nécessaire.

   a) $\ln(n)$. b) e^n. c) 2^n. d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   e) n^4. f) $\dfrac{1}{n^2}$ g) $\sqrt{n}$. h) $\sqrt[3]{n}$.

2. Donnez un équivalent simple puis la limite de la suite dont le terme général est proposé. *Rappel :* $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

   a) $\dfrac{n^4}{3n^7}$. b) $-7n^8+5n^6$. c) $\dfrac{-3n^2+n+2}{n^2-1}$. d) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

   e) $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$. f) $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1$. g) $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3. On souhaite, dans cette question, étudier la limite de la suite de terme général $u_n = n^2+n-\ln(n^3+n)$.

(a) Montrez que $\ln(n^3+n) = 3\ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

(b) Justifiez que $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

(c) Justifiez que $n - 3\ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^2\right)$.

(d) Déduisez-en un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ puis la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

***

Problème 3.

Dans cet exercice nous travaillons dans $\mathbb{R}^2$ et un élément $\vec{x}$ de $\mathbb{R}$ peut être noté $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 et x_2 sont des nombres réels.

Soit $K = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 3x_2 = 0\right\}$ (là aussi x_1 et x_2 sont les coordonnées de $\vec{x}$).

2. Déterminez si $\vec{0}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiennent ou non à K.
3. Démontrez que K est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
4. Calculez $\vec{y} + \vec{z}$, $8\vec{y}$ et $7\vec{y} - 9\vec{z}$.
5. (a) Calculez le déterminant de $\vec{y}$ et $\vec{z}$.
   (b) $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont-ils colinéaires ?
6. (a) Démontrez que K est une droite vectorielle.
   (b) Donnez sans justification une équation cartésienne de la droite K.
   (c) Justifiez que $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite K.
   (d) Déduisez de la question précédente une représentation paramétrique de la droite K.
7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(\vec{x}) = (x_1 + 3x_2\ ;\ 2x_1 + 6x_2\ ;\ 3x_1 + 9x_2)$ où $\vec{x} = (x_1; x_2)$.
   (a) Calculez les images de $(0;1)$ par f, puis de $(1;0)$ par f, et enfin de $(-3;1)$ par f.
   (b) Déterminez la matrice M associée à l'application f.
   (c) Que peut-on en déduire pour l'application f ?
   (d) Déduisez des questions précédentes $f\left(2(0;1) + (-3;1)\right)$.
   (e) Calculez $M \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (f) Calculez $M(\vec{y})$.
   (g) Résolvez le système $\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 9x_2 & = & 0 \end{array}\right.$
   (h) Déduisez-en que l'ensemble des antécédents du vecteur nul par f est la droite vectorielle K vue précédemment.
8. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application définie par $g(x_1; x_2; x_3) = (x_1\ ;\ x_2 + x_3\ ;\ 2x_1 + x_2)$.
   (a) Justifiez que g est une application linéaire.
   (b) Résolvez le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 8 \end{array}\right.$
   Puis déduisez-en les antécédents de $(3;7;8)$ par g.
   (c) Déterminez les antécédents de $(3;6;10)$ par g.

***