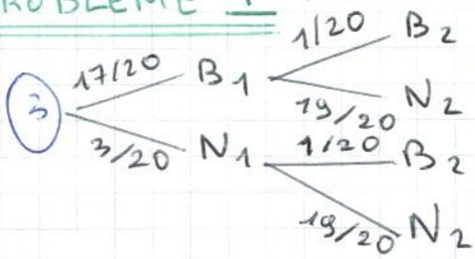
DEVOIR SURVEILLÉ DU 2024/01/23.

PROBLÈME 1 /81

A 1 3



3

3

A-2 $\boxed{\Omega_1 = \{ B_1B_2, B_1N_2, N_1B_2, N_1N_2 \}}$. 3

A-3 Les boules de l'urne U_1 étant indiscernables au toucher il est naturel de modéliser la situation par l'équiprobabilité : l'univers formé par les 20 boules de l'urne U_1 contient 17 boules blanches donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(B_1) = \frac{17}{20}}$$

3

A-4

$$\mathbb{P}(B_2 | B_1) = \frac{1}{20}$$

3

$$\mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{3}{20}$$

3

A-5 "Obtenir une boule blanche au premier tirage et une boule noire au deuxième tirage" se note :

$$\boxed{B_1 \cap N_2}$$

3

A-6 Calculons $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$.

$\mathbb{P}(B_1) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2 | B_1)$$

$$= \frac{17}{20} \times \frac{1}{20}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{17}{400}}$$

3

A.7 Calculons $\mathbb{P}(B_2)$.

$\{B_1, \overline{B_1}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2)$$

En usant de la formule des probabilités composées :

3

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2 | B_1) + \mathbb{P}(\overline{B_1}) \times \mathbb{P}(B_2 | \overline{B_1}).$$

$$= \frac{17}{20} \times \frac{1}{20} + \frac{3}{20} \times \frac{1}{20}$$

$$= \frac{20}{400}$$

$$\mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{20}$$

A-8 Calculons $\mathbb{P}(B_1 | B_2)$.

Par définition :

$$\mathbb{P}(B_1 | B_2) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)}$$

$$= \frac{\frac{17}{400}}{\frac{1}{20}}$$

3

$$= \frac{17 \times 20}{400}$$

$$\mathbb{P}(B_1 | B_2) = \frac{17}{20}$$

2

B-9 $\Omega_2 = \{B, N\}^{\mathbb{N}^*}$ autrement dit :

(1) Ω_2 est formé des suites de lettres B et N.

B-10 $\mathbb{P}(V_1) = \mathbb{P}(B_1) = \dfrac{17}{20}$, (3) (3)

$\mathbb{P}(V_2) = \dfrac{289}{400}$ et $\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{340}{400}$. (3) (3)

B-11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{P}(V_n) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n)$.

D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(V_n) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2 | B_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(B_n | B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1})$$

(2)
$$= \underbrace{\frac{17}{20} \times \frac{17}{20} \times \cdots \times \frac{17}{20}}_{n \text{ fois}}$$

$\mathbb{P}(V_n) = \left(\dfrac{17}{20}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B-12 $(\mathbb{P}(V_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique (de terme initial $\mathbb{P}(V_1) = \dfrac{17}{20}$) et de raison $q = \dfrac{17}{20}$

(3) Puisque $\dfrac{17}{20} \in]-1, 1[$.

$(\mathbb{P}(V_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

B-13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

* Une issue ω appartenant à V_n n'est formée que de boules blanches jusqu'au rang n donc $\omega \in B_k$ pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$.

(1) Autrement dit $\omega \in \bigcap_{k\in[\![1;n]\!]} B_k$ et

donc $V_n \subset \bigcap\limits_{k\in[\![1;n]\!]} B_k$.

(3)

* Si $\omega \in \bigcap_{k \in [\![1;n]\!]} B_k$ alors ω est formé de boules blanches jusqu'au rang n et donc :

$$\bigcap_{k \in [\![1;n]\!]} B_k \subset V_n.$$

* Finalement, par double inclusion :

$$\boxed{V_n = \bigcap_{k \in [\![1,n]\!]} B_k \text{, pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$

B-14

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B_n}\Big) = \mathbb{P}\Big(\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n}\Big)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\overline{\bigcap_{k \in [\![1,n]\!]} B_k}\Big)$$

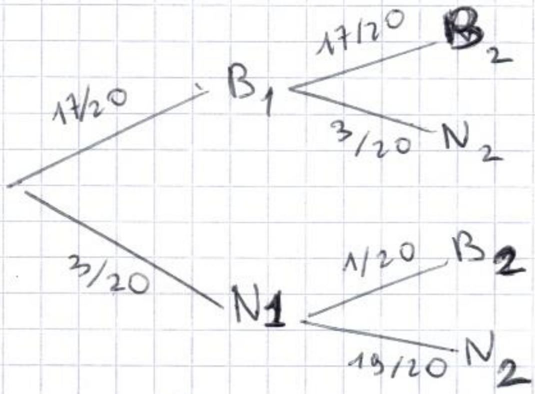
$$= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\overline{V_n})$$

(1)

$$= \lim_{n \to +\infty} 1 - \mathbb{P}(V_n)$$

$$\boxed{\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B_n}\Big) = 1.}$$

C-15 On peut représenter la situation par :

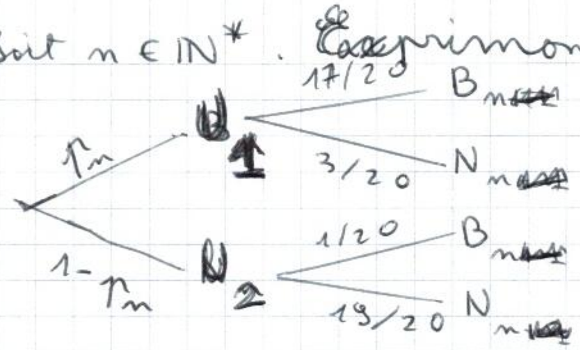


Pour que le ~~tirage~~ second tirage soit fait dans U_1 il faut que B_1 soit réalisé :

(3)

$$\boxed{P_2 = \mathbb{P}(B_1) = \frac{17}{20}}$$

C-16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimons $\mathbb{P}(B_n) = p_n$



D'après la formule des probabilités totales :

(1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(U_1 \cap B_n) + \mathbb{P}(U_2 \cap B_n) \\
&= \mathbb{P}(U_1) \times \mathbb{P}(B_n \mid U_1) + \mathbb{P}(U_2) \times \mathbb{P}(B_n \mid U_2) \\
&= p_n \times \frac{17}{20} + (\cancel{p_n}\ 1 - p_n) \times \frac{1}{20} \\
&= \frac{16}{20} p_n + \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = 0{,}8\, p_n + 0{,}05.}$

C-17.a) (3) | f est une fonction affine.

C-17-b) $0{,}8 > 0$ et $0{,}8$ est le coefficient directeur de f donc :

(3) | f est strictement croissante.

C-17-c) Puisque f est strictement croissante :

(1) | $f(x_1) < f(x_2)$.

C-18- $p_3 = 0{,}8\, p_2 + 0{,}05$ d'après la question C-16.

(1) $= 0{,}8 \times \frac{17}{20} + 0{,}05$, d'après C-15

| $p_3 = \cancel{\frac{392}{400}}\ \frac{95}{200}$

(5)

C-19_a) Notons $\mathcal{P}(n)$: " $p_n > 0,25$ " pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(3) rédac

Démontrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.

(3)

* $p_1 = 1 > 0,25$

* Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

(3)

$p_{k+1} = 0,8\ p_k + 0,05$, d'après C-16

~~donc,~~ D'après l'hypothèse de récurrence :

$\cancel{p_{k+1}} = \cancel{0,8}\ p_k > 0,25$

or f est strictement croissante donc :

$$f(p_k) > f(0,25)$$

$$p_{k+1} > 0,8 \times 0,25 + 0,05$$

$$p_{k+1} > 0,2 + 0,05$$

$$p_{k+1} > 0,25.$$

* On a démontré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n > 0,25.}$$

C-19-b * $p_1 = 1$ et $p_2 = \frac{17}{20}$ donc : $p_1 \geqslant p_2$

(3)

* Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $p_k \geqslant p_{k+1}$.

Puisque f est croissante :

$$f(p_k) \geqslant f(p_{k+1})$$

i.e. $\quad p_{k+1} \geqslant p_{k+2}$

On a démontré par récurrence que

$(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

C-19-c) D'après les deux questions précédentes, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée donc :

3

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

C-19-d) En passant à la limite dans la formule de récurrence : $p_{n+1} = 0,8\, p_n + 0,05$ on obtient : $\ell = 0,8\,\ell + 0,05$.

2

En résolvant cette équation on obtient :

$\ell = 0,25$

PROBLÈME 2 /57

20) 3 * $3 \times 0 - 2 \times 0 = 0$ donc $\vec{0} \in G$

3 * $3 \times 3 - 2 \times (-2) = 13$ donc $\vec{y} \notin G$

3 * $3 \times 14 - 2 \times 21 = 0$ donc $\vec{x} \in G$

21 * D'après la question précédente $\vec{0} \in G$

3 * $G \subset \mathbb{R}^2$

* Soient $a \in \mathbb{R}$, $(\vec{x}, \vec{y}) \in G^2$.

$a\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} a x_1 + y_1 \\ a x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

Donc : $3 \times (a x_1 + y_1) - 2 \times (a x_2 + y_2)$

$= a(3x_1 - 2x_2) + 3y_1 - 2y_2$

Or : $3x_1 - 2x_2 = 0$ car $\vec{x} \in G$

et $3y_1 - 2y_2 = 0$ car $\vec{y} \in G$.

donc :

$3(a x_1 + y_1) - 2(a x_2 + y_2) = 0$

Autrement dit : $a\vec{x} + \vec{y} \in G$.

G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

22 3 * $\vec{y} + \vec{z} = \begin{pmatrix} 17 \\ 19 \end{pmatrix}$

3 $-7\vec{y} = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \end{pmatrix}$

3 $5\vec{y} - 3\vec{z} = \begin{pmatrix} -27 \\ -73 \end{pmatrix}$

23.(a) $\begin{vmatrix} 3 & 14 \\ -2 & 21 \end{vmatrix} = 3 \times 21 - (-2) \times 14 = 91$

3 Puisque le déterminant est non nul :

$\vec{y}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

23.(b)(i) (3) $a\vec{y} + b\vec{z} = \begin{pmatrix} 3a + 14b \\ -2a + 21b \end{pmatrix}$

23.(b)(ii) $L_1 \leftarrow -2L_1$, $L_2 \leftarrow 3L_2$ $\begin{cases} -6a - 28b = 0 \\ -6a + 63b = 0 \end{cases}$

(2) $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$ $\begin{cases} -6a - 28b = 0 \\ -91b = 0 \end{cases}$

Donc $b = 0$ puis en substituant : $a = 0$

Le système admet une unique solution : $(0,0)$.

23(b)(iii) Si $a\vec{y} + b\vec{z} = \vec{0}$ alors forcément $a = b = 0$
Autrement dit $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont linéairement
(1) indépendants.

$\vec{y}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

24(a) G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ mais ce n'est pas $\{\vec{0}\}$ (car $\vec{z} \neq \vec{0}$ et $\vec{z} \in G$) ni
(1) $\mathbb{R}^2$ (car $\vec{y} \notin G$) donc :

G est une droite vectorielle.

24(b) Dans la définition de G :

(1) $3x_1 - 2x_2 = 0$

24(c) $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \in G$ (car $3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$)
donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur
(2) de la droite vectorielle G.

24 (d) ③

$$G : \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 2t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

25 (a) ③ ③

f est une fonction affine (et même linéaire)
$-\frac{3}{2}$ est son coefficient directeur.

25 (b) ③

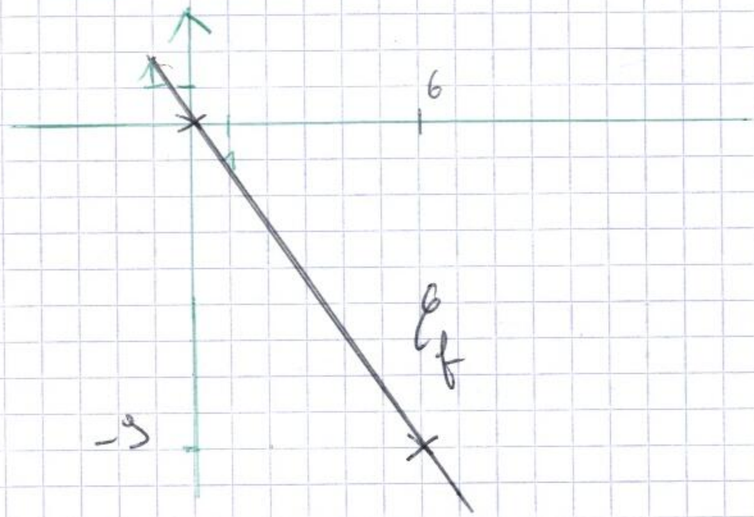
0 est l'ordonnée à l'origine de f.

25 (c) ③

$f(6) = -\frac{3}{2} \times 6$

$f(6) = -9$

25 (d) ③



26 (a) ①

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \times 1 + 6 \times 2 \\ 6 \times 2 - 4 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

26 (b) $\varphi(-3;7) = (-9\times(-3) + 6\times 7 \;;\; 6\times(-3) - 4\times 7)$

2

$\boxed{\varphi(-3;7) = (69;-46)}$

26 (c)

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} -9x_1 + 6x_2 \\ 6x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}$$

1

26 (d) On remarque que φ est l'application associée à la matrice A donc :

0

φ est une application linéaire.

26(e)(i) $\varphi(\vec{x}) = (48;-64)$ si et seulement si :

1

$(-9x_1 + 6x_2 \;;\; 6x_1 - 4x_2) = (48;-64)$

$$\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 = 48 \\ 6x_1 - 4x_2 = -64 \end{cases}$$

26(e)(ii)

$$\cancel{\begin{array}{ll} L_1 \Leftarrow L_1 \times 2 & \begin{cases} -18x_1 + 12x_2 = 6 \\ -18x_1 + 12x_2 = 6 \end{cases} \\ L_2 \Leftarrow -3L_2 & \end{array}}$$

$$\cancel{L_2 \Leftarrow L_1 - L_2 \quad \begin{cases} -18x_1 + 12x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}}$$

$$\begin{array}{ll} L_1 \Leftarrow 2L_1 & \begin{cases} -18x_1 + 12x_2 = 96 \\ -18x_1 + 12x_2 = -192 \end{cases} \\ L_2 \Leftarrow -3L_2 & \end{array}$$

1

$$L_2 \Leftarrow L_1 - L_2 \quad \begin{cases} -18x_1 + 12x_2 = 96 \\ 0 = 288 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est vide.

26 (f) $\varphi(\vec{x}) = \vec{0} \iff \begin{cases} -9x_1 + 6x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -9x_1 + 6x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\iff -9x_1 + 6x_2 = 0$

$\iff -3x_1 + 2x_2 = 0$

1 $\iff 3x_1 - 2x_2 = 0$

$\iff \vec{x} \in G$

PROBLÈME 3 / 82

A-27 (a) Cours. 3 3 3

A-27 (c) Strictement croissante. 3

A-27 (b) exponentielle et racine cubique sont définies

3 3 3 3 sur $\mathbb{R}$ et ln sur $\mathbb{R}_+^*$. Racine cubique est impaire.

A-27-(d) 3 cosinus est 2π-périodique.

A-28 (a) f n'est pas une application sur $\mathbb{R}$ car elle

3 n'est pas définie en -5.

A-28 (b) -5 est une valeur interdite pour f donc :

3 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

A-28 (c) $f(-3,5) = f(-5,5)$ donc f ~~est~~ n'est pas injective.

3 f semble surjective : toutes les valeurs

3 réelles sont atteintes.

3 f n'étant pas surjective, elle n'est pas bijective.

28(d) (3) $\lim\limits_{-\infty} f = 0$

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} f(x) = +\infty$

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} f(x) = -\infty$

(3) $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

28.(e) De la première limite on déduit que :

(3) $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$. d'équation $y = 0$.

Des deux limites suivantes nous déduisons que :

(3) $\mathcal{C}_f$ admet une ~~tangente~~ asymptote verticale d'équation $x = -5$.

28(f) (3) f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

28(g)

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
f	$\searrow$	$+\infty$	‖	$-\infty$	$\nearrow$

(2)

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
f	0	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

29 f étant croissante sur $]-\infty ; -5[$,

$-12456 \in]-\infty ; -5[$ et $-12 \in]-\infty ; -5[$,

~~donc~~ : $-12456 < -12$ donc :

(1) $\boxed{f(-12456) \leq f(-12)}$

30 (a) (3) * $u_0 = 0$ et $0 \leq 3$

* Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $u_k \leq 3$.

Puisque f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$$f(u_k) \leq f(3)$$

(1) $$u_{k+1} \leq \sqrt{6+3}$$

$$u_{k+1} \leq 3$$

* On a démontré par récurrence que :

(1) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq 3}$.

30 (b) $u_1 = \sqrt{6 + u_0}$

(3) $\boxed{u_1 = \sqrt{6}}$

30 (c) (3) * $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6}$ donc $u_0 \leq u_1$.

* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_k \leq u_{k+1}$.

Puisque f est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

(1) $$f(u_k) \leq f(u_{k+1})$$

i.e. $u_{k+1} \leq u_{k+2}$

* On a démontré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq u_{n+1}$$

autrement dit :

1 $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

30 (d) D'après les questions 30 (a) et (c), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc convergente.

2 $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$

30 (e) En passant à la limite :

$$\ell = \sqrt{6+\ell}$$

2 On en déduit :

$$\ell^2 = 6+\ell$$

et donc : $\boxed{\ell^2 - \ell - 6 = 0}$

30 (f) $x^2 - x - 6 = 0$ est une équation polynomiale de degré deux avec : $a = 1$, $b = -1$ et $c = -6$

donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times 1\times(-6) = 25$.

3 $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1} = -2$

et $x_2 = 3$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{3\,;\,-2\}.}$

30 (g) Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, $\ell \in \mathbb{R}_+$

1 et donc :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3}$$