Devoir surveillé CPGE HKBL. 2024/01/23.

Les problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

***

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

***

*Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les $\boxed{\text{encadrant}}$ ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandé.*

***

PROBLÈME 1.

On considère deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

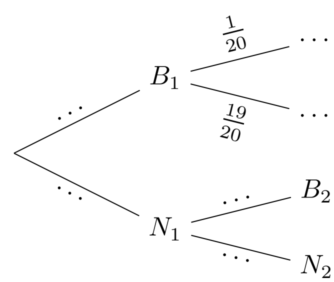
On note B_1 l'événement « obtenir une boule blanche au premier tirage ». Plus généralement, pour n entier naturel non nul, on note B_n l'événement « obtenir une boule blanche au n-ième tirage ».

On note N_1 l'événement « obtenir une boule noire au premier tirage ». Plus généralement, pour n entier naturel non nul, on note N_n l'événement « obtenir une boule noire au n-ième tirage ».

Partie A.

Dans cette partie on réalise deux tirages successives en procédant de la manière suivante : on tire d'abord une boule de l'urne U_1 puis une boule de l'urne U_2.

1. Recopiez puis complétez l'arbre probabiliste pondéré représentant cette expérience dessiné ci-dessous.



2. Donnez une définition en extension de l'univers Ω_1 correspondant à ces deux tirages successifs.

3. Donnez, en précisant la loi de probabilité utilisée, $\mathbb{P}(B_1)$.

4. Donnez sans justification $\mathbb{P}(B_2|B_1)$ et $\mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right)$.

5. Comment noter l'événement « obtenir une boule blanche au premier tirage et obtenir une boule noire au deuxième tirage » avec les notations déjà introduites dans l'énoncé.

6. Calculez la probabilité de tirer successivement deux boules blanches.

7. Calculez la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage.

8. Calculez la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage sachant qu'au second on a obtenu une boule blanche.

Partie B.

Dans cette partie on tire une boule de l'urne U_1 dont on note la couleur et que l'on replace dans l'urne U_1 puis on recommence indéfiniment ce tirage.

On note V_n, pour n entier naturel non nul, l'événement « n'obtenir que des boules blanches jusqu'au n-ieme tirage ».

9. Proposez, sans justifier, un univers Ω_2 pour cette expérience aléatoire.
10. Donnez, sans justifier $\mathbb{P}(V_1)$, $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(V_2)$ et $\mathbb{P}(B_2)$.
11. Justifiez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(V_n) = \left(\frac{17}{20}\right)^n$.
12. Étudiez la convergence de la suite $(\mathbb{P}(V_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
13. Justifiez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \bigcap_{k\in[\![1,n]\!]} B_k$.
14. Déduisez-en que l'événement $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{B_n}$ est certain.

Partie C.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n ($n \geqslant 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

15. Calculer p_2.
16. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$. *Vous pourrez appuyer votre raisonnement sur un arbre probabiliste pondéré.*
17. Soit $f : x \mapsto 0,8x + 0,05$.
    (a) Quelle est la nature (nom) de la fonction f ?
    (b) Justifiez le sens de variation de f.
    (c) Soient x_1 et x_2 des nombres réels tels que $x_1 < x_2$.
    Comparez $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en vous aidant de la question précédente.
18. Calculer p_3.
19. (a) Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.
    (b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
    (c) En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.
    (d) Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$. En déduire la valeur de ℓ.

***

PROBLÈME 2.

Dans cet exercice nous travaillons dans $\mathbb{R}^2$ et un élément $\vec{x}$ de $\mathbb{R}$ peut être noté $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 et x_2 sont des nombres réels.

Soit $G = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 - 2x_2 = 0\right\}$ (là aussi x_1 et x_2 sont les coordonnées de $\vec{x}$).

20. Déterminez si $\vec{0}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{z} = \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \end{pmatrix}$ appartiennent ou non à G.

21. Démontrez que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

22. Calculez $\vec{y} + \vec{z}$, $-7\vec{y}$ et $5\vec{y} - 3\vec{z}$.

23. On souhaite déterminer si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont colinéaires suivant deux méthodes.

    (a) *Première méthode.* Calculez le déterminant de $\vec{y}$ et $\vec{z}$ puis concluez.

    (b) *Seconde méthode.* Soient a et b des nombres réels.

       i. Donnez les coordonnées du vecteur $a\vec{y} + b\vec{z}$.

       ii. Résolvez le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} 3a & + & 14b & = & 0 \\ -2a & + & 21b & = & 0 \end{array}\right.$.

       iii. Concluez.

24. (a) Démontrez que G est une droite vectorielle.

    (b) Donnez sans justification une équation cartésienne de la droite G.

    (c) Justifiez que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite G.

    (d) Déduisez de la question précédente une représentation paramétrique de la droite G.

25. Soit $f : x \mapsto -\dfrac{3}{2}x$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

    (a) Quelle est la nature de la fonction f ? Quel est le nom générique donné à $-\dfrac{3}{2}$ vis-à-vis de f ?

    (b) Quelle est l'ordonnée à l'origine de f ?

    (c) Calculez $f(6)$.

    (d) Donnez une représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

26. Soit $A = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ une matrice et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(\vec{x}) = (-9x_1 + 6x_2\ ;\ 6x_1 - 4x_2)$.

    (a) Calculez $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

    (b) Déterminez $\varphi\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$ (l'image du vecteur par l'application φ).

    (c) Calculez $A \times \vec{x}$ (exprimez le résultat en fonction des coordonnées x_1 et x_2 de $\vec{x}$).

    (d) Déduisez-en que φ est une application linéaire.

(e) On souhaite dans cette question déterminez les antécédents de $\begin{pmatrix} 48 \\ -64 \end{pmatrix}$ par l'application φ.

i. Justifiez que si $\vec{x}$ est un antécédent de $\begin{pmatrix} 48 \\ -64 \end{pmatrix}$ par φ alors $\left\{ \begin{array}{rcrcr} -9x_1 & + & 6x_2 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & = & -2 \end{array} \right.$

ii. Résolvez le précédent système et concluez.

(f) En procédant comme à la question précédente démontrez que l'ensemble des antécédents de $\vec{0}$ par φ est l'ensemble G.

***

PROBLÈME 3.

Les trois parties A, B et C de ce problème sont indépendantes.

Partie A.

On considère une fonction f sur $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres positifs définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}.$$

On admettra que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

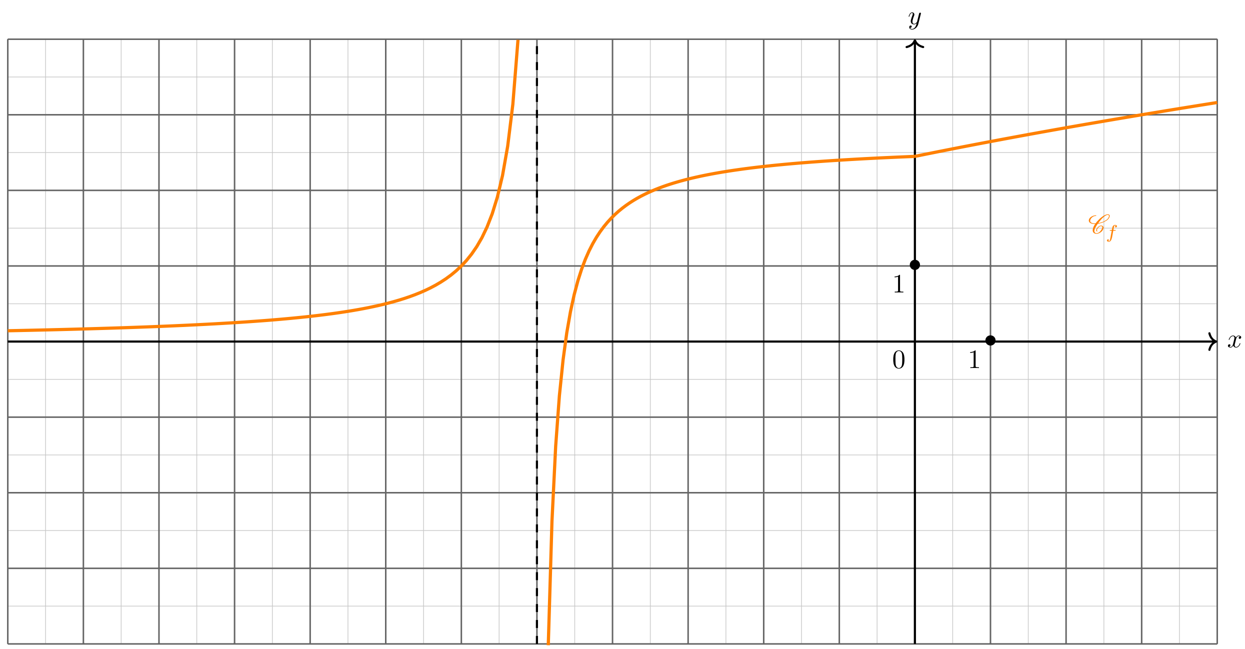
27. (a) Tracez à main levée sur votre copie les courbes représentatives des fonctions exp, ln et racine cubique en précisant sur le tracer les éléments caractéristiques.

(b) Indiquez le domaine de définition et la parité des trois précédentes fonctions.

(c) Quelle est la monotonie commune aux trois fonctions de la question 1.(a) ?

(d) Donnez une fonction périodique en précisant sa période.

28. On donne ci-dessous la représentation graphique de f.



Répondez aux questions qui suivent en vous appuyant sur cette représentation graphique.

(a) f est-elle une application définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Quelle est la valeur interdite pour la fonction f ? Déduisez-en son domaine de définition, $\mathscr{D}_f$.

(c) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

(d) Donnez les limites de f en $-\infty$, -5 et $+\infty$.

(e) Que pouvez-vous déduire de la question précédente en terme d'asymptotes à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$

(f) Quel est le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.

(g) Dressez le tableau de variation de f.

29. On admet dans cette question que f est strictement croissante sur $]-\infty, -5[$.
Comparez (*i.e.* dites qui est le plus grand) $f(-12\,456)$ et $f(-12)$ en justifiant.

30. Nous allons dans cette question étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On admet que $f(x) = \sqrt{6+x}$ sur $[0, +\infty[$ autrement dit que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. *Vous pourrez notamment utiliser le fait que f est croissante sur $[0; +\infty[$.*

(a) Montrez en raisonnant par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3.

(b) Calculez u_1.

(c) Montrez en raisonnant par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(d) Déduisez des questions précédentes la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite que nous noterons ℓ.

(e) En commençant par passer à la limite dans la formule de récurrence définissant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrez que ℓ est solution de l'équation $x^2 - x - 6 = 0$.

(f) Résolvez l'équation $x^2 - x - 6 = 0$.

(g) Concluez quant à la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie B.

Déterminez la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous en justifiant à partir de la question d).

a) $A_n = \ln(n)$.

b) $B_n = n^3\sqrt{n}$.

c) $C_n = \dfrac{\frac{1}{n} + 3}{n^2}$.

d) $D_n = \dfrac{n^3 - n^2 + 4}{n^5 - n^3 + n}$.

e) $E_n = \dfrac{e^n}{n^{234}}$.

f) $F_n = \dfrac{n!n^4}{3^n}$.

g) $G_n = \dfrac{n^2 + \ln(n)}{3n^2 + 0,1^n}$.

h) $H_n = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$.

i) $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

j) $J_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Partie C.

Démontrez que les suites définies, pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n! \times n}.$$

sont adjacentes. Que pouvez-vous en conclure ?

***

***