Devoir surveillé CPGE HKBL. 2023/12/14.

A l'attention de M. Neveux : la calculatrice est interdite.

***

Les exercices et problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

***

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

***

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les $\boxed{\textit{encadrant}}$ *ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la* ***clarté****, de la* ***concision*** *et de la* ***précision*** *de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandé.*

***

Le sujet A, noté sur 15, est composé des 3 premiers exercices et le sujet B, noté sur 20, des 4 derniers.

***

EXERCICE 1 (Sujet A uniquement). 4 points.

1. Calculez. Aucune justification n'est attendue.

   a) $A = 6578 - 9745$.
   b) $B = -23 - 97$.
   c) $C = 31 \times (-17)$.
   d) $D = -12 \times (-1000)$.
   e) $E = \frac{675}{17} - \frac{700}{17}$.
   f) $F = \frac{-3}{-7} + \frac{-7}{4}$.
   g) $G = -\frac{2}{7} + \frac{12}{14}$.
   h) $H = \frac{2}{3} + \frac{1}{7}$.
   i) $I = \frac{2}{8} \times \frac{95}{9}$.
   j) $J = \frac{\frac{14}{11}}{\frac{7}{33}}$.
   k) $K = -1 - \frac{2+1}{5}$.
   l) $L = \frac{1}{7} \times 49$.
   m) $M = 5 \times 2 + 4$.
   n) $N = 6 + 7 \times 8$.
   o) $P = -5 + 3(12 - 23)$.
   p) $Q = \frac{2}{5}\left(\frac{10}{3} + \frac{1}{5}\right)$.

2. Exprimez les nombres sous la forme e^x où $x \in \mathbb{R}$.

   a) $A = \mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{12}$.
   b) $B = \mathrm{e}^{-12} \times \mathrm{e}^{17}$.
   c) $C = \left(\mathrm{e}^{-23}\right)^5$.
   d) $D = \mathrm{e}^{-6} \times \left(\mathrm{e}^4\right)^8$.
   e) $E = \frac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^8}$.
   f) $F = \frac{\mathrm{e}^{12}}{\mathrm{e}^{-55}}$.
   g) $G = \frac{\mathrm{e}^8 \times \mathrm{e}^{-4}}{\left(\mathrm{e}^3\right)^4}$.
   h) $H = \mathrm{e}^6 \times \frac{\mathrm{e}^6}{\mathrm{e}^9}$.
   i) $I = 21\mathrm{e}^4 - 20\left(\mathrm{e}^2\right)^2$.
   j) $J = \mathrm{e}^{\sqrt{3}} \times \mathrm{e}^{2\sqrt{5}}$.
   k) $K = \mathrm{e}^{\ln(6)} \times \mathrm{e}^{1+\sqrt{2}}$.
   l) $L = \mathrm{e}^{2^8}$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimez les nombres sous la forme $x\ln(a) + y$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

   a) $A = \ln(8a)$.
   b) $B = \ln(a^{11})$.
   c) $C = \ln(10a^7)$.
   d) $D = \ln\left(\frac{12,3}{a}\right)$.
   e) $E = \ln\left(\frac{11,1}{a^7}\right)$.
   f) $D = \ln\left(\frac{7}{a^8} \times \frac{27}{a^{-13}}\right)$.

4. Résolvez les équations suivantes.

a) $(E_1): \ -3x = 66.$

b) $(E_2): \ 12x - 2 = -38.$

c) $(E_3): \ 4 - 3x = 8x + 15.$

d) $(E_4): \ \dfrac{7}{2}x - 5 = -4.$

e) $(E_5): \ \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{2}x = 1 - 8x.$

f) $(E_6): \ (x - 12,56)(x + 1 + \sqrt{2}) = 0.$

g) $(E_7): \ (8x - 48)(72 - 9x) = 0.$

h) $(E_8): \ \dfrac{2x - 99}{7x + 14} = 0.$

i) $(E_9): \ x^2 - 238 = 0.$

j) $(E_{10}): \ x^2 - 5x - 6 = 0.$

k) $(E_{11}): \ 4x^2 - 4x = 1.$

l) $(E_{11}): \ \ln(x) = 0.$

m) $(E_{12}): \ \mathrm{e}^{3x-12} = 1.$

n) $(E_{12}): \ \mathrm{e}^{7x-1} = -4.$

5. Résolvez les inéquations suivantes.

a) $(F_1): \ -12x < -4.$

b) $(F_2): \ 8x - 5 \geqslant 3.$

c) $(F_3): \ -7x - 3 \leqslant 8 - 5x.$

d) $(F_4): \ \dfrac{7}{3}x + 7 > \dfrac{2}{3}.$

e) $(F_5): \ (x - 288)(x + 1,245) < 0.$

f) $(F_6): \ (3x - 2,4)(24 - 6x) \geqslant 0.$

g) $(F_7): \ 2x^2 - 2x - 4 < 0.$

h) $(F_8): \ \dfrac{26x - 13}{3 - x} < 0.$

i) $(F_9): \ x^2 + 3x - 7 < 0.$

6. Développez les expressions suivantes.

a) $A(x) = 3(x + 1).$

b) $B(x) = (2x + 1)(x - 3).$

c) $C(x) = (x - 3)^2.$

d) $D(x) = (4x + 3)^2.$

***

EXERCICE 2 (Sujets A et B). 5,5 points.

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

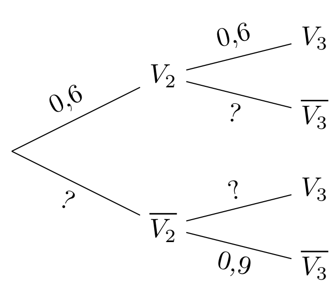
- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6 = \frac{6}{10}$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9 = \frac{9}{10}$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire ou décimale selon ce qui est le plus simple.
Les questions 3 et 4 sont indépendantes.

1. Dans cette question on s'intéresse aux deuxième et troisième sondages.

   (a) Recopier puis compléter l'arbre suivant sur la copie.



(b) On note A l'événement « les 2e et 3e sondages sont positifs ».
Exprimer A avec V_2 et V_3 (*pensez au opérations entre ensembles*) puis calculer la probabilité $\mathbb{P}(A)$ de l'événement A.

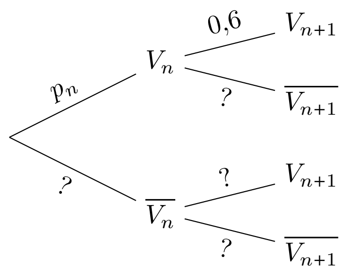
(c) On note B l'événement « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».
Exprimer B avec V_2 et V_3 puis calculer la probabilité $\mathbb{P}(B)$ de B.

(d) Calculez $p_3 = \mathbb{P}(V_3)$ la probabilité pour que le 3e sondage soit positif.

(e) Un membre de l'équipe archéologique arrivé en retard constate que le troisième sondage est positif.
Calculer la probabilité que, sachant cela, le deuxième sondage ait été positif.

Dans la suite n désigne un entier naturel non nul.

2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



3. Dans cette question on cherche à calculer la probabilité d'obtenir une suite ininterrompue de sondages positifs.

(a) Comment noter l'événement S_3 : « les trois premiers sondages sont positifs » en utilisant V_1, V_2 et V_3.
Calculer sa probabilité.

(b) Comment noter l'événement S_n : « les n premiers sondages sont positifs » en utilisant V_1, V_2, ..., V_n.

(c) Justifier que la suite $(\mathbb{P}(S_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique en précisant son terme initial et sa raison.

(d) En déduire la convergence de $(\mathbb{P}(S_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$.

4. L'objet de cette question est l'étude de la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

(a) Démontrer que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

On note $u_n = p_n - 0,2$.

(b) Démontrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique en précisant terme initial et raison.

(c) En déduire une expression de p_n en fonction de n.

(d) Étudier la convergence de $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et interpréter le résultat obtenu.

***

EXERCICE 3 (Sujets A et B). 5,5 points.

Dans tout cet exercice on note $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

On considère les ensembles

$$F = \left\{\vec{z} \in \mathbb{R}^2 \mid 6z_1 + 3z_2 = 0\right\}$$

et

$$G = \left\{\vec{z} \in \mathbb{R}^2 \mid 6z_1 + 3z_2 + 1 = 0\right\}.$$

Partie A.

1. Soit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
   Montrez que $\vec{x} \in F$.

2. Démontrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Démontrez que $\vec{y} \notin F$.

   (b) Calculez le vecteur $2\vec{x} - 3\vec{y}$ (en donnant ses coordonnées).

   (c) Justifiez que trouver des réels a et b tels que $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$ équivaut à résoudre le système d'inconnues a et b suivant
   $$(E) : \left\{ \begin{array}{rcrl} a & + & 3b & = 0 \\ -2a & + & b & = 0 \end{array} \right. .$$

   (d) Résolvez le système (E).

   (e) $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont-ils colinéaires ?

4. Démontrez que F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

5. En utilisant un vecteur non nul de F, déterminez une représentation paramétrique de F.

Partie B.

1. Démontrez que G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2. Justifiez succinctement que G est une droite affine de $\mathbb{R}^2$.

3. Justifiez que le point $A\left(-1; \dfrac{5}{3}\right)$ appartient à G.

4. Après avoir justifié que $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de G, donnez une représentation paramétrique de la droite G.

5. Sur votre copie dessinez dans un repère le point A puis la droite G.

***

EXERCICE 4 (Sujet B uniquement). 4 points.

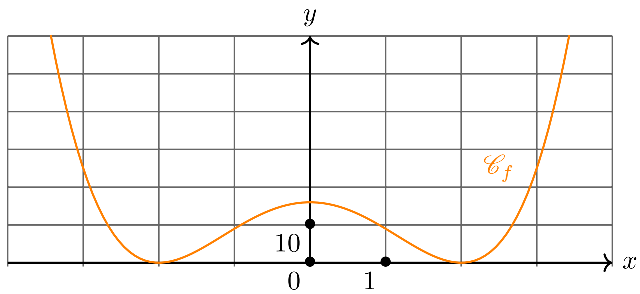
1. (a) Tracez à main levée sur votre copie les courbes représentatives des fonctions exp, ln et racine cubique en précisant sur le tracer les éléments caractéristiques.

   (b) Indiquez le domaine de définition et la parité des trois précédentes fonctions.

   (c) Quelle est la monotonie commune aux trois fonctions de la question 1.(a) ?

   (d) Donnez une fonction périodique en précisant sa période.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto (x-2)^2(x+2)^2$.
   Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.



(a) D'après le graphique, discutez de la parité de f.

(b) Par lecture graphique déterminez les antécédents 10 par f.

(c) Par lecture graphique déterminez $f(1)$ puis calculez $f(1)$.

(d) Déterminez le nombre d'antécédents de 40 par f.

(e) Par lecture graphique donnez $f([1;2])$.

(f) Par lecture graphique donnez $f^{-1}([0;10])$.

(g) Par lecture graphique, donnez les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

(h) Par lecture graphique donnez les éventuels maximum, minimum, bornes supérieure ou inférieure.

(i) Donnez sans justification le tableau de variation de f.

3. Soient $g : x \mapsto 3x$ et $h : x \mapsto 4x - 7$ des applications sur $\mathbb{R}$.

(a) Quelle est la nature de la fonction h ? Comment appelle-t-on les nombres 4 et -7 pour cette fonction ?

(b) Déterminez le sens de variation des fonctions g et h.

(c) A-t-on $g \circ h = h \circ g$?

***

EXERCICE 5 (Sujet B uniquement). 5 points.

Les trois parties sont complètement indépendantes.

Partie A.

Déterminez la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous en justifiant si nécessaire.

a) $A_n = \ln(n)$.

b) $B_n = n^3\sqrt{n}$.

c) $C_n = \dfrac{\frac{1}{n} + 3}{n^2}$.

d) $D_n = \dfrac{n^3 - n^2 + 4}{n^5 - n^3 + n}$.

e) $E_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^{234}}$.

f) $F_n = \dfrac{n!n^4}{3^n}$.

g) $G_n = \dfrac{n^2 + \ln(n)}{3n^2 + 0,1^n}$.

h) $H_n = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$.

i) $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

j) $J_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Partie B.

On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 1.$$

Démontrez que la suite (u_n) peut s'exprimez à l'aide de la formule explicite

$$u_n = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$$

pour tout entier naturel n.

Partie C.

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 1,

$$v_n = v_{n-1} + \frac{n}{2^n}.$$

1. (a) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 1,

$$v_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

   (b) Déduisez-en que la suite (v_n) est majorée.

2. (a) Montrez par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 2, $n + 2 \leqslant 2^n$.

   (b) Démontrez que la suite (v_n) est minorée.

3. Montrez que la suite (v_n) est monotone.

4. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Partie D.

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\[2ex] b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases}$$

avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 12$.

1. (a) Démontrez que la suite $(b_n - a_n)$ est une suite géométrique.

   (b) Déduisez-en sa limite.

2. Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
   Que pouvez-vous en déduire ?

3. (a) Démontrez que la suite $(2a_n + 3b_n)$ est constante.

   (b) Déduisez-en la limite des suites (a_n) et (b_n).

***