Devoir surveillé CPGE HKBL. 2023/11/09.

Les exercices et problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

***

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

***

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les $\boxed{\textit{encadrant}}$ *ou en les* <u>*soulignant*</u>*. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la* ***clarté****, de la* ***concision*** *et de la* ***précision*** *de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandé.*

***

Le sujet A, noté sur 15, est composé des 3 premiers exercices et le sujet B, noté sur 20, des 4 derniers.

***

EXERCICE 1 (Sujet A uniquement). 4 points

1. Calculez. Aucune justification n'est attendue.

   a) $A = 2458 - 3459$. b) $B = -189 - 24$. c) $C = 23 \times (-13)$.

   d) $D = -17 \times (-10000)$. e) $E = \dfrac{345}{23} - \dfrac{233}{23}$. f) $F = \dfrac{1}{17} + \dfrac{4}{-17}$.

   g) $G = -\dfrac{3}{15} + \dfrac{8}{5}$. h) $H = \dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{7}$. i) $I = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{14}{9}$.

   j) $J = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{45}}$. k) $K = 2 - \dfrac{9}{7}$. l) $L = \dfrac{1}{6} \times 48$.

   m) $M = 2 \times 3 + 7$. n) $N = 3 + 4 \times 6$. o) $P = (2 + 3(6 - 9))$.

   p) $Q = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2}\right)$.

2. Exprimez les nombres sous la forme e^x où $x \in \mathbb{R}$.

   a) $A = \mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^2$. b) $B = \mathrm{e}^{-8} \times \mathrm{e}^5$. c) $C = \left(\mathrm{e}^{-3}\right)^5$.

   d) $D = \mathrm{e}^{-2} \times \left(\mathrm{e}^6\right)^7$. e) $E = \dfrac{\mathrm{e}^6}{\mathrm{e}^3}$. f) $F = \dfrac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^{-17}}$.

   g) $G = \dfrac{\mathrm{e}^7 \times \mathrm{e}^{-5}}{\left(\mathrm{e}^6\right)^2}$. h) $H = \mathrm{e}^5 \times \dfrac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^8}$. i) $I = \dfrac{1}{6}\left(13\mathrm{e}^3 - 7\mathrm{e}^3\right)$.

   j) $J = \mathrm{e}^{\pi} \times \mathrm{e}^{2,15}$. k) $K = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \times \mathrm{e}^{-1}$. l) $L = \mathrm{e}^{2^3}$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimez les nombres sous la forme $x\ln(a) + y$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

   a) $A = \ln(3a)$. b) $B = \ln(a^7)$. c) $C = \ln(8a^2)$.

   d) $D = \ln\left(\dfrac{5}{a}\right)$. e) $E = \ln\left(\dfrac{4}{a^3}\right)$. f) $D = \ln\left(\dfrac{2}{a^3} \times \dfrac{7}{a^{-5}}\right)$.

4. Résolvez les équations suivantes.

   a) $(E_1) :\ 2x = 17$. b) $(E_2) :\ 3x - 5 = -7$.

   c) $(E_3) :\ 6 - 2x = 4x + 3$. d) $(E_4) :\ \dfrac{2}{5}x - 3 = -12$.

   e) $(E_5) :\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{6}x = 1 - 2x$. f) $(E_6) :\ (x - 7)(x + 2,14) = 0$.

   g) $(E_7) :\ (2x - 3)(6 - 57x) = 0$. h) $(E_8) :\ \dfrac{3x - 1}{5x + 2} = 0$.

   i) $(E_9) :\ x^2 - 5 = 0$. j) $(E_{10}) :\ x^2 - 7x - 8 = 0$.

   k) $(E_{11}) :\ x^2 - x = 1$. l) $(E_{11}) :\ \mathrm{e}x = 0$.

   m) $(E_{12}) :\ \mathrm{e}^{x+3} = 1$. n) $(E_{12}) :\ \mathrm{e}^{7x-1} = 17$.

5. Résolvez les inéquations suivantes.

   a) (F_1) : $-5x < -7$.
   b) (F_2) : $2x - 3 \geqslant 8$.
   c) (F_3) : $-3x - 7 \leqslant 5 - 8x$.
   d) (F_4) : $\frac{3}{7}x + 4 > \frac{2}{7}$.
   e) (F_5) : $(x-2)(x+100) < 0$.
   f) (F_6) : $(7x-2)(3-6x) \geqslant 0$.
   g) (F_7) : $2x^2 + 6x + 4 < 0$.
   h) (F_8) : $\frac{8x-4}{21-7x} < 0$.
   i) (F_9) : $x^2 + 2x - 2 < 0$.

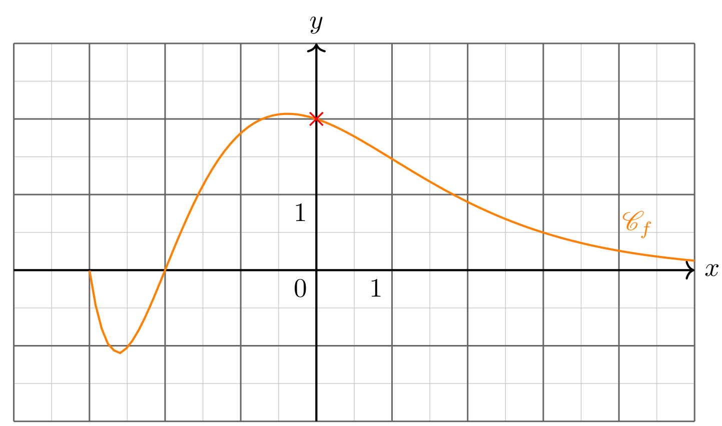
***

EXERCICE 2 (Sujets A et B). 5,5 points

On considère la fonction $\tilde{f} : x \mapsto (x+2)\exp\left(-x + \ln\left(\frac{x}{3}+1\right)\right)$.

1. (a) Justifiez que $\tilde{f}$ n'est pas une application sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminez le domaine de définition de $\tilde{f}$.
   Dans la suite on note f la restriction de $\tilde{f}$ à son domaine de définition.
2. (a) Calculez $f(3)$.
   (b) Calculez $f(0)$.

On donne ci-dessous une représentation graphique de f.



Nom et prénom :

1. *Vous répondrez à cette question en vous aidant de la représentation graphique.*
   (a) Donnez l'image de $1,5$ par f.
   (b) Donnez l'ensemble des antécédents de 1 par f.
   (c) Donnez l'ensemble des antécédents 3 par f.
   (d) Donnez le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   (e) Donnez une valeur approchée de $5e^{-3+\ln(2)}$.
   (f) Donnez $f([0;1])$.
   (g) Donnez $f^{-1}([0;1])$.
3. *Vous répondrez à cette question en vous aidant de la représentation graphique.*
   (a) f est-elle surjective ? injective ? est-ce un bijection ? Vous justifierez.
   (b) Proposez une restriction de f qui soit injective.
4. *Vous répondrez à cette question en vous aidant de la représentation graphique.*

   (a) Dressez le tableau de variation de f.
   (b) La fonction f est-elle majorée, minorée ? admet-t-elle un extremum ?

5. On considère l'application $g : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Quelle est la nature de g ? Comment appelle-ton les nombres $-\frac{1}{2}$ et 1 pour cette fonction ?
   (b) Tracez la courbe représentative de g dans le repère ci-dessus.
   (c) Démontrez que g est surjective.
   (d) Démontrez que g est injective.
   (e) Démontrez que g est une bijection.
   (f) Démontrez que $g^{-1}(x) = -2x + 2$.

6. On considère l'application $h : x \mapsto x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Donnez l'expression algébrique de $g \circ h$.
   (b) Donnez l'expression algébrique de $h \circ g$.
   (c) h est g sont-elles réciproques l'une de l'autre ?

***

EXERCICE 3 (Sujets A et B). 5,5 points

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Déterminez la limite en $+\infty$ des suites définies par leur terme général.

   a) $a_n = \dfrac{1}{n^{-3}}$.

   b) $b_n = \mathrm{e}^n$.

   c) $c_n = \ln(n)$.

   d) $d_n = \dfrac{1}{\ln(n)} + 3 + 0,5^n$.

   e) $f_n = \sqrt{n} + \mathrm{e}^{-n}$.

   f) $g_n = \dfrac{\ln(n)}{0,5^n}$.

   g) $h_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2} + n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$.

2. (a) Écrivez les sommes et produits en extension, puis calculez-les.

   a) $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} k^2 + 1$.

   b) $B = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}(-2)^i$.

   c) $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}$.

   d) $D = \displaystyle\sum_{p=0}^{2} 5 + (-1)^p$.

   e) $\displaystyle\prod_{i=1}^{6}\frac{i}{i+1}$.

   f) $\displaystyle\prod_{k=1}^{5} k$.

3. On considère la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \dfrac{n + \cos(n)}{n2^n}$.
   (a) Donnez le minimum et le maximum de la fonction cosinus.
   (b) Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{n2^n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{n2^n}$.
   (c) Concluez quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n^2 + 3^n}{27^n}$.

(a) Démontrez que $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(3^n)$.

(b) Démontrez que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{9}\right)^n$.

(c) Étudiez la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Déterminez un équivalent simple des suites suivantes.

a) $s_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}$.

b) $t_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1}$.

c) $r_n = \ln(n+1) \times \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

d) $p_n = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

***

EXERCICE 4 (Sujet B). 5 points

Dans cet exercice on notera x_1, x_2, etc. les coordonnées du vecteur $\vec{x}$.

Partie A : dans $\mathbb{R}^2$.

1. Effectuez les calculs vectoriels suivants : $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, $3\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $-2\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\8\end{pmatrix}$.

2. On note $G_1 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\right\}$
Démontrer que G_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1 - x_2 = 0\right\}$.

   (a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est-il un élément de E ?

   (b) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   (c) i. Démontrer qu'il existe un vecteur de $\mathbb{R}^2$ qui n'appartient pas à E.

   ii. Justifier que E est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ c'est-à-dire un ensemble de la forme $\mathbb{R}\vec{y}$ où y est un vecteur que l'on précisera.

Partie B : dans $\mathbb{R}^3$.

On note $E' = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 2x_1 \text{ et } x_3 = 0\right\}$ et $F = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0\right\}$.

1. Démontrer que E' contient un vecteur non nul.

2. Soient $\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{h} = \begin{pmatrix}-7\\-42\\-7\end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Déterminer parmi $\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{h}$ ceux qui appartiennent à F.

   (b) Démontrer que $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{h}$ sont colinéaires.

   (c) Démontrer que $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{g}$ ne sont pas colinéaires, autrement dit, démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.

3. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4. Démontrer que F n'est pas $\mathbb{R}^3$.
5. Dans cette question on cherche à comparer E' et F du point de vue de l'inclusion.
   (a) Démontrer que $E' \subset F$.
   (b) Démontrer que $E' \neq F$.
   (c) En déduire $E' \cap F$.
6. On note $\overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ -18 \\ -5 \end{pmatrix}$.
   On souhaite établir le fait que $\overrightarrow{m}$ peut être obtenu comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{g}$.
   (a) Vérifier que $\overrightarrow{m} \in F$.
   (b) Soient x et y des réels.
   Calculer les coordonnées du vecteur $x\overrightarrow{e} + y\overrightarrow{g}$.
   (c) Résoudre le système
   $$\begin{cases} 2x + y &= 1 \\ \quad\ 6y &= -18 \\ -x + y &= -5 \end{cases}$$
   (d) Exprimer $\overrightarrow{m}$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{g}$.

***

EXERCICE 5 (Sujet B). 4 points

Partie A : ensemble fini.

Un jeu consiste à lancer une pièce parfaitement équilibrée puis à lancer un dé tétraédrique (quatre faces numérotées de 1 à 4) parfaitement équilibré lui-aussi.

1. Proposez un univers Ω_1 pour l'expérience consistant à lancer une pièce puis, un univers Ω_2 pour l'expérience consistant à lancer le dé tétraédrique.
2. Dorénavant on s'intéresse à l'expérience consistant à lancer la pièce puis le dé.
   (a) Donnez un exemple d'issue de cette expérience aléatoire.
   (b) Représentez l'expérience aléatoire par un arbre probabiliste.
   (c) Donnez l'univers Ω de cette expérience.
   (d) Donnez le cardinal (nombre d'éléments) de Ω.
3. On note P_1 : « obtenir pile puis un nombre impair », P_2 : « obtenir pile puis un nombre pair », F_1 : « obtenir face puis un nombre impair » et P_1 : « obtenir face puis un nombre pair ».
   (a) Donnez un exemple d'issue qui réalise F_1.
   (b) Calculez la probabilité $\mathbb{P}(F_1)$ que F_1 soit réalisé.
   (c) Donnez sans justification $\mathbb{P}(F_2)$, $\mathbb{P}(P_1)$ et $\mathbb{P}(P_2)$.
   (d) Démontrez que $\{F_1, F_2, P_1, P_2\}$ est un système complet d'événements.
4. On note A : « obtenir un nombre inférieur ou égale 2.
   (a) Donnez une définition en extension de $F_1 \cap A$, de $F_2 \cap A$, de $P_1 \cap A$ puis de $P_2 \cap A$.
   (b) Calculez $\mathbb{P}(A \cap F_1)$.
   (c) Calculez $\mathbb{P}(A)$.
   (d) Calculez $\mathbb{P}(A \cup F_1)$.

Partie B : ensemble infini.

Une expérience consiste à lancer indéfiniment une pièce. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n : « Obtenir un pile lors du n-ième lancé. » et A_n : « N'obtenir que des piles lors des n premiers lancés. »

Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}$' $A_{n+1} \subset A_n$.