DS HKBL 14/09/2023

1

Exercice 1

a) $A = 26$

b) $B = 56$

c) $C = 50$

d) $D = -15$

e) $E = 84$

f) $F = \frac{37}{33}$

g) $G = \frac{5}{24}$

h) $H = 2^4 = 16$

Exercice 2

a) $x+3=0 \iff x=-3$

b) $-4x=0 \iff x=0$

c) $2x-1=4 \iff 2x=5 \iff x=\frac{5}{2}$

d) $3x=-5x+1 \iff 8x=1 \iff x=\frac{1}{8}$

e) $2+x=4-3x \iff -2=-4x \iff \frac{1}{2}=x$

f) $3x+2<2x-1 \iff x<-3 \iff x\in]-\infty;-3[$

g) $-2x<4x \iff 0<2x \iff 0<x \iff x\in \mathbb{R}_+^*$.

h) $-x+1 \geq 3x+4 \iff -3 \geq 4x \iff -\frac{3}{4} \geq x \iff x\in]-\infty;-\frac{3}{4}]$

i) $x^2-4x-4=1 \iff x^2-4x-5=0 \iff (x+1)(x-5)=0 \iff x\in \{-1;5\}$.

j) $(x-4)(3x+6)\geq 0$

$x-4>0 \iff x>4$

$3x+6>0 \iff 3x>-6 \iff x>-2$

x	$-\infty$	-2		4		$+\infty$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$	
$3x+6$	$-$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(3x+6)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$(x-4)(3x+6)\geq 0 \iff x\in]-\infty;-2]\cup[4;+\infty[$

k) $3x-1>0 \iff 3x>1 \iff x>\frac{1}{3}$

$4-x>0 \iff 4>x$

x	$-\infty$		$1/3$		4		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x-1)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$(3x-1)(4-x)<0 \iff x \in]-\infty ; \frac{1}{3}[\cup]4 ; +\infty[.$

l) $x^2>0 \iff x \in \mathbb{R}^*$

$\frac{1}{3}x-7>0 \iff x>21$

x	$-\infty$		0		21		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{3}x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2\left(\frac{1}{3}x-7\right)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

$x^2\left(\frac{1}{3}x-7\right)>0 \iff x \in]21 ; +\infty[$

Exercice 3

1) $\frac{1}{3-2} = 1$ et $3-2=1$ donc $3 \in \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x-2} = x-2\}$

2) $2\times 0^3 + 3\times 0 + 1 = 1 \neq 0$ donc
$0 \in \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^3+3x+1=0\}$.

3) $3\times 1 - (-4) + 1 = 8 \neq 0$ donc :
$(1 ; -4) \notin \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x-y+1=0\}$

4) $-3x+2 = x-4 \iff 6 = 4x \iff \frac{3}{2} = x.$
donc : $\{x \in \mathbb{R} \mid -3x+2 = x-4\} = \{\frac{3}{2}\}.$

5) $-4x+1 < -3x-2 \iff -x < -3 \iff x > 3$
Donc : $\{x \in \mathbb{R} \mid -4x+1 < -3x-2\} =]3 ; +\infty[.$

6)a) * $((-2)^2-1)((-2)^2+5\times(-2)+6) = 3\times(4-10+6) = 3\times 0 = 0$

* $((-1)^2-1)((-1)^2+5\times(-1)+6) = 0$

* $(1^2-1)(1^2+5\times 1+6) = 0$

Ainsi tous les éléments de $\{-2;-1;1\}$ sont dans F et donc $\boxed{\{-2;-1;1\}\subset F}$

6)b) Le seul élément de E qui reste est 0, or:

$(0^2-1)(0^2-5\times 0+6) = -6 \neq 0$ donc

$0\notin F$. D'où : $\boxed{E\not\subset F}$

6)c) $\boxed{E\cap F = \{-2;-1;1\}}$ car $E = \{-2;-1;0;1\}$ et

$0\notin F$.

7) Voici des sous-ensembles de E:

$\boxed{\emptyset,\ E,\ \{-2\},\ \{-1;0\},\ \{-2;-1;0\}}$

Exercice 4.

1)a) $\boxed{F\cap H = \{4\}}$

1)b) $\boxed{F\cup H = \{-24{,}7;\pi;4;\sqrt{2};-\sqrt{7};10^3;\frac{1}{3}\}}$

1)c) $\boxed{F\cap H\cap G = \{4\}}$

1)d) $\boxed{\overline{G} = \{-24{,}7;\sqrt{2};-\sqrt{7};0\}}$

2)a) $\boxed{10^3 \in H}$

2)b) $\boxed{(F\cap H)\subset G}$

3)a) $\{1;2;4\}\cup\{8;-2\} = \{1;2;4;8;-2\}$

3)b) $\llbracket -2;5\rrbracket \cup \{6;-3\} = \llbracket -3;6\rrbracket$

3)c) $]-6;4[\ \cap\ ]3;5] =]3;4[$.

3)d) $[1;+\infty[\ \cap\ [0;4[\ = [1;4[$

3)e) $\llbracket -6;12\rrbracket \cap\ ]-6;12[\ = \llbracket -5;11\rrbracket$

3) b) $\mathbb{Z} \cap]-1;3] = [\![0;3]\!]$.

4) $[\![-1;1]\!] \times \{5;7\} = \{(-1;5),(-1;7),(0;5),(0;7),$
$(1;5),(1;7)\}$

5)a) $1{,}5 \in [1;3]$ et $1{,}5 \notin [\![1;3]\!]$ donc :
$[1;3] \neq [\![1;3]\!]$.

5)b) $[\![3;5]\!] = \mathbb{N} \cap [3;5]$ car $\mathbb{N} \cap [3;5]$ désigne les entiers naturels compris entre 3 et 5 au sens large

5)c) $2x+1 = 3x-3 \Leftrightarrow 4 = x$
$4x+1 = -7 \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$

Donc $4 \in \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+1 = 3x-3\}$ et $4 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid 4x+1 = -7\}$

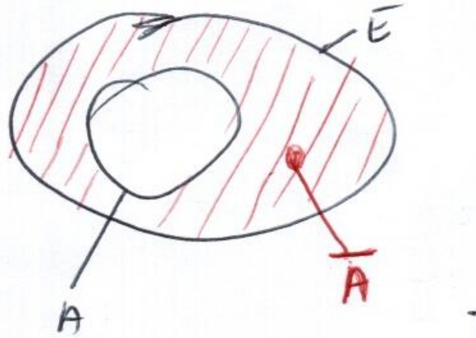
d'où $\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid 2x+1 = 3x-3\} \neq \{x \in \mathbb{R} \mid 4x+1 = -7\}}$

5 d) En raisonnant comme précédemment et puisque :
$4x-1 = 15 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4$.

$\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid 2x+1 = 3x-3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x-1 = 15\}}$

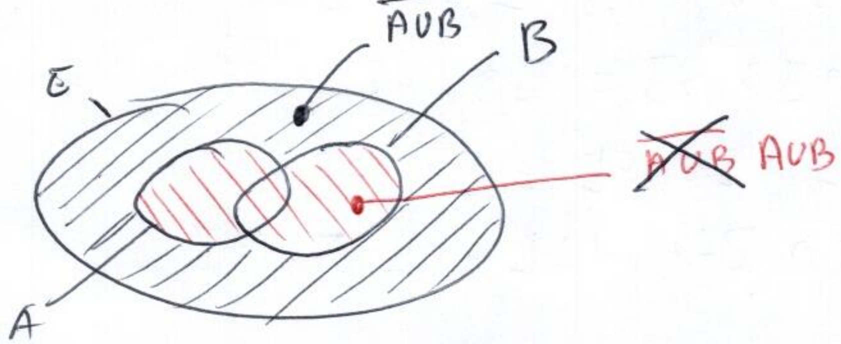
Exercice 5

1) $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E



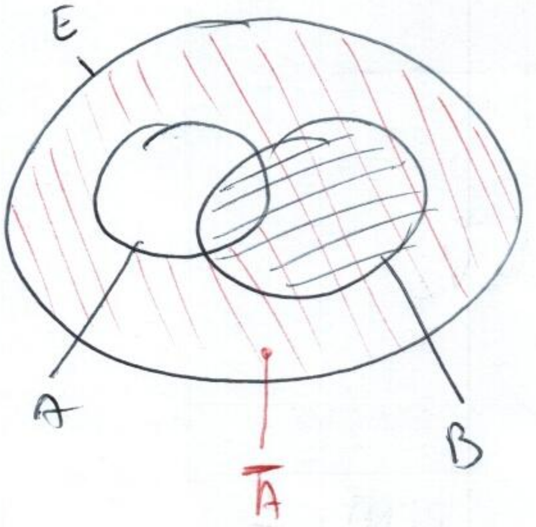
$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$

2)

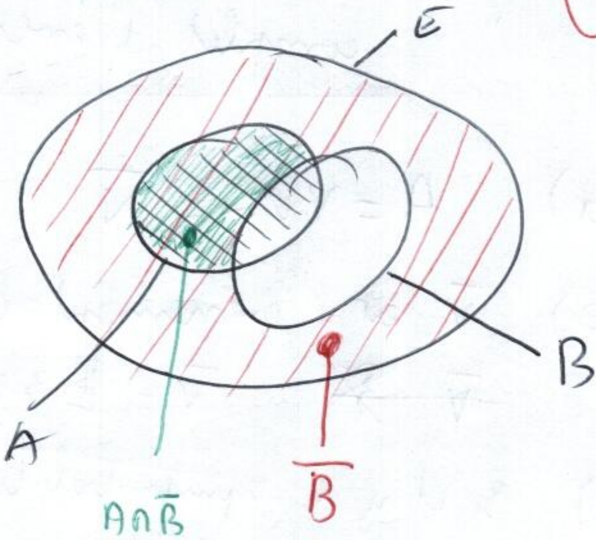


3)

$\bar{A} \cup B$



$\overline{A \cap \bar{B}}$



3

Exercice 6

1) a) $\Omega = \{P ; F\}$

1) b) $\Omega = [\![1 ; 6]\!]$

1) c) $\Omega = [\![2 ; 12]\!]$

1) d) $\Omega = [\![1 ; 6]\!]^3$

1) e) $\Omega = \mathbb{N}^*$

1) f) $\Omega = \{R ; J\}^4$

1) g) ~~$\Omega = \{P ; F\} \times [\![$~~

$\Omega = \{F, (P,1), (P,2), (P,3), (P,4), (P,5), (P,6)\}$

1) h) $\Omega = \mathcal{P}([\![1 ; 100]\!])$ (ensemble des parties de $[\![1 ; 100]\!]$).

2) a) $\Omega = [\![1 ; 10]\!]$, $|\Omega| = 10$.

2) b) $R = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

2) c) * Les couleurs correspondent à des numéros distincts :

$V \cap N = V \cap R = N \cap R = \emptyset$.

* Les trois couleurs recouvrent toutes les boules :

$V \cup N \cup R = \Omega$.

Des deux points précédents nous déduisons que :

$\boxed{\text{V, R et N forment un système complet d'événements.}}$

2) d) $A = V \cup R = \overline{N}$

2) e) $\overline{V}$ est l'événement contraire de V.

$\cancel{\overline{V} = \Omega}$ $\overline{V} = [\![3 ; 10]\!]$.

2) f) S'il y a équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(N) = \frac{|N|}{|\Omega|} = \frac{4}{10}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(N) = \frac{2}{5}}$$

2) g) ~~N'ob~~ Notons B l'événement n'obtenir qu'une boule noire lors des dix tirages.

Nous reconnaissons une loi binomiale et donc :

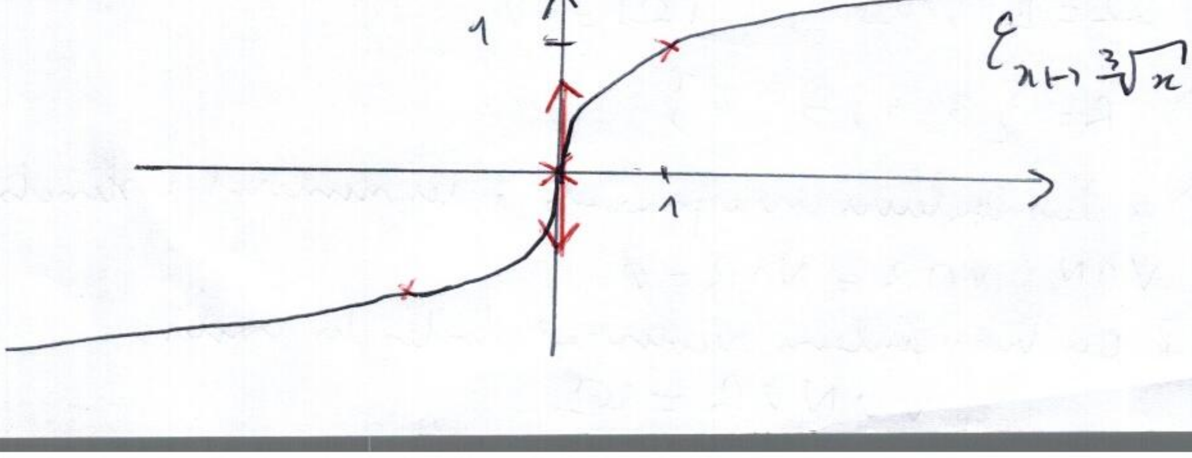
$$\mathbb{P}(B) = \binom{10}{1} \left(\frac{2}{5}\right)^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{10-1}$$

$$= 10 \times \frac{2}{5} \times \frac{3^9}{5^9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = 4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^9}$$

Exercice 7

1)



2) a) $f(2) = -2,4$

2) b) $f(-3) = 4$

2) c) $f^{-1}(\{1,5\}) = -2,25$

2) d) $f^{-1}(\{-1\}) = \{-1,6 ; 0,4 ; 1,4 ; 4,3\}$

$f^{-1}(\{5\}) = \emptyset$

2) e) 1 admet ~~un~~ deux ~~unique~~ antécédents par f.

2) f)

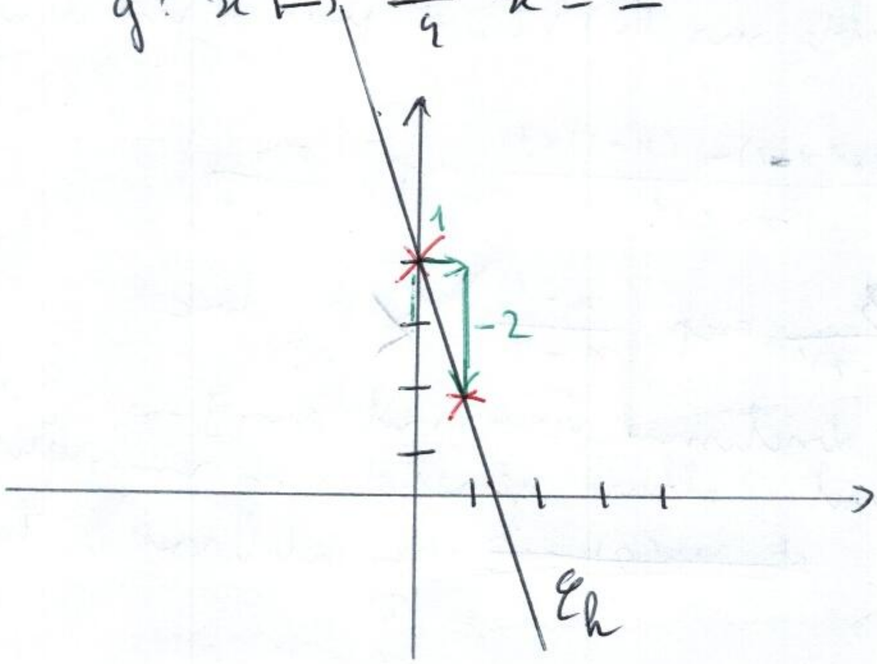
x	-4		-3		$-0,9$		1		3		5
f	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-3,1$	$\nearrow$	$0,5$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1

3) a) L'ordonnée à l'origine de g est :
$g(0) = -1$

3) b) Le coefficient directeur de g est $\frac{1}{4}$.

3) c) $g : x \mapsto \frac{1}{4}x - 1$

3) d)



Exercice 8

Etudions r

* $D_r = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
* r n'est ni paire, ni impaire.
* r est continue sur $]-\infty ; 2[$ et sur $]2 ; +\infty[$.
* ~~[illegible]~~ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} r = e$.

De même $\lim\limits_{-\infty} r = e$.

Ainsi $\mathcal{C}_r$ admet pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ la droite d'équation $y = e$.

* $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{x+1}{x-2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} r(x) = +\infty$

Ainsi $\mathcal{C}_r$ admet la droite d'équation $x = 2$ pour asymptote verticale.

* $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{x+1}{x-2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} r(x) = 0$

* r est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et pour x pris dans cet ensemble :

$$r'(x) = \frac{1 \times (x-2) - (x+1) \times 1}{(x-2)^2} \exp\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$= \frac{-3}{(x-2)^2} \exp\left(\frac{x+1}{x-2}\right) < 0 \text{ donc}$$

r est strictement décroissante sur $]-\infty ; 2[$ et $]2 ; +\infty[$

* On en déduit l'allure générale, en remarquant :

$r(-1) = 1$ ~~et $r(0) = e$~~ et en utilisant le tableau de variation :

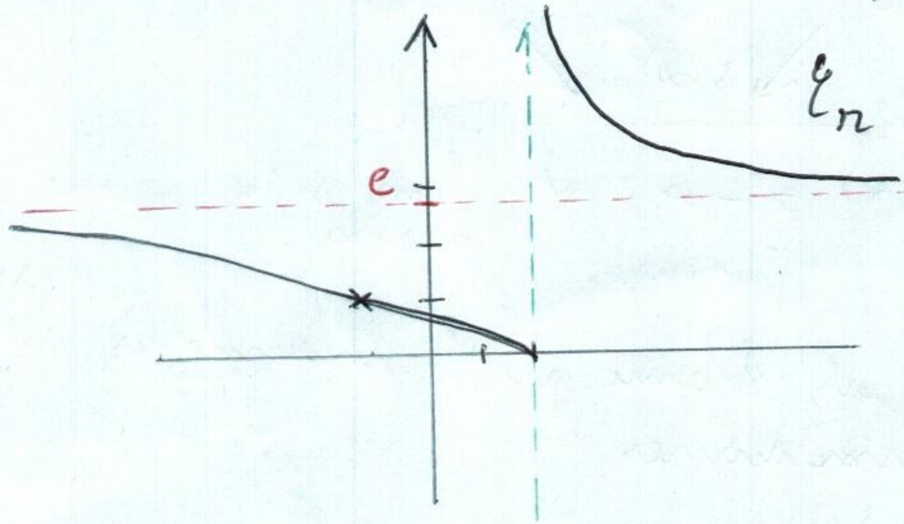
x	$-\infty$		2		$+\infty$
r'		$-$	||	$-$	
r	e	$\searrow$	0 || $+\infty$	$\searrow$	e

Brouillon

$\frac{x+1}{x-2} = 1$

$x+1 = x-2$

5



Etudions s

* $\mathcal{D}_s =]-2 ; +\infty[$.
* Pas de parité.
* $\lim\limits_{+\infty} s = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -2^* \\ x > -2}} s(x) = +\infty$
* s dérivable sur $\mathcal{D}_s$ et : $s'(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$
* s' dérivable sur $\mathcal{D}_s$ et : $s''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{x+2}{(x+2)^2} = \frac{x+4}{(x+2)^2}$

x	-2		0		$+\infty$
$s''(x)$	||	$-$	0	$+$	
s'	||	$\searrow$	$\ln(3) + \frac{3}{5}$	$\nearrow$	
$s'(x)$	||		$+$		
s	||		$\nearrow$		$+\infty$

x	-2		α		$+\infty$
$s''(x)$			$+$		
s'		$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$
$s'(x)$			0		
s		$+\infty$	$\searrow s(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

car $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} s'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} s'(x) = +\infty$

de plus le α est obtenu par le théorème des valeurs intermédiaires.