

Devoir surveillé de HKBL du 14/09/2023.

Devoir de 4 heures.

Calculatrice interdite.

Le sujet ne doit pas être rendu avec la copie.

Exercice 1.**6 points**

Calculez sans nécessairement justifier.

a) $A = 2 + 3 \times 8.$

b) $B = 7 \times (3 + 5).$

c) $C = 2 \times 5^2.$

d) $D = (2 + 3)(4 - 7).$

e) $E = -3 \times (23 - 51).$

f) $F = \frac{2}{3} + \frac{5}{11}.$

g) $G = -\frac{3}{8} + \frac{7}{12}.$

h) $H = 2^{14} \times 2^{-10}.$

Exercice 2.**7 points**

Résolvez les équations et inéquations suivantes. Pour les trois dernières vous justifierez par un tableau de signe.

a) $x + 3 = 0.$

b) $-4x = 0.$

c) $2x - 1 = 4.$

d) $3x = -5x + 1.$

e) $2 + x = 4 - 3x.$

f) $3x + 2 < 2x - 1.$

g) $-2x < 4x.$

h) $-x + 1 \geq 3x = 4.$

i) $x^2 - 4x - 4 = 1.$

j) $(x - 4)(3x + 6) \geq 0.$

k) $(3x - 1)(4 - x) < 0.$

l) $x^2 \left(\frac{1}{3}x - 7\right) > 0.$

Exercice 3.**5 points**

1. Montrez que $3 \in \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x-2} = x - 2\right\}.$

2. Montrez que $0 \notin \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^3 + 3x + 1 = 0\right\}.$

3. Déterminez si $(1; -4)$ appartient à $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y + 1 = 0\right\}.$

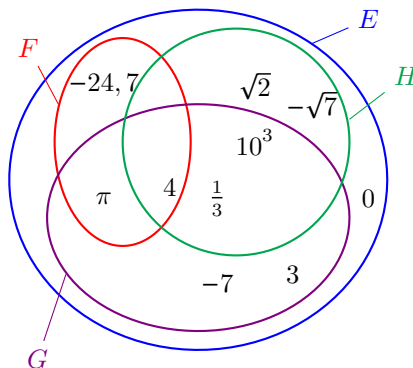
4. Donnez une définition en extension de $\{x \in \mathbb{R} \mid -3x + 2 = x - 4\}.$

- L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid -4x + 1 < -3x - 2\}$ est un intervalle. Lequel?
- On note $E = \llbracket -2; 1 \rrbracket$ et $F = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 + 5x + 6) = 0\}$.
 - Justifiez succinctement que $\{-2; -1; 1\} \subset F$.
 - Démontrez que $E \not\subset F$.
 - Donnez une définition en extension de $E \cap F$.
- Donnez 5 sous-ensembles de l'ensemble E de la question précédente.

Exercice 4.

9,25 points

1.



Donnez une définition en extension des ensembles suivants.

- $F \cap H$.
 - $F \cup H$.
 - $F \cap H \cap G$.
 - \overline{G} .
- En utilisant le diagramme de Venn de la question précédente, recopiez puis complétez les assertions suivantes.
 - $10^3 \dots H$.
 - $(F \cap H) \dots G$.
 - Simplifiez l'écriture des ensembles proposés.
 - $\{1; 2; 4\} \cup \{8; -2\}$.
 - $\llbracket -2; 5 \rrbracket \cup \{6; -3\}$.
 - $] - 6; 4[\cap]3; 5[$.
 - $[1; +\infty[\cap]0; 4[$.
 - $\llbracket -6; 12 \rrbracket \cap] - 6; 12[$.
 - $\mathbb{Z} \cap] - 1; 3[$.

4. Donnez une définition en extension du produit cartésien $\llbracket -1, 1 \rrbracket \times \{5; 7\}$
5. Déterminez (en justifiant bien évidemment) si les ensembles suivants sont égaux ou pas.
 - a) $[1; 3]$ et $\llbracket 1, 3 \rrbracket$.
 - b) $\llbracket 3, 5 \rrbracket$ et $\mathbb{N} \cap [3; 5]$.
 - c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = 3x - 3\}$ et $\{x \in \mathbb{R} \mid 4x + 1 = -7\}$.
 - d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = 3x - 3\}$ et $\{x \in \mathbb{R} \mid 4x - 1 = 15\}$.

Exercice 5

3 points.

Dans cet exercice les schémas attendus sont des diagrammes de Venn (diagrammes patates).

Au moins un schéma par question (même ceux qui ont un poil dans la main).

Soient E un ensemble, A , B et C des sous-ensembles de E .

1. Schématisez \overline{A} , rappelez son nom et sa définition.
2. Schématisez $\overline{A \cup B}$.
3. Justifiez avec deux schémas que $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$.

Exercice 6.

8,5 points

1. Déterminez l'univers correspondant aux expériences aléatoires décrites ci-dessous.
 - (a) On lance une pièce et on regarde si on a obtenu pile ou face.
 - (b) On lance un dé à 6 faces et on note le nombre obtenu.
 - (c) On lance deux dés et on note la somme des deux nombres obtenus.
 - (d) On lance trois dés équilibrés à 6 faces chacun. On note les numéros obtenus.
 - (e) On lance une pièce jusqu'à obtenir un pile. On relève le nombre de lancers nécessaires.
 - (f) Une urne contient $n \in \mathbb{N}$ boules rouges et $m \in \mathbb{N}$ boules jaunes. On tire successivement et avec remise 4 boules de l'urne en notant à chaque fois la couleur obtenue.

- (g) On lance une pièce est si le résultat est pile on lance un dé à 6 faces.
- (h) On tire simultanément (d'un coup) un nombre aléatoire de boules d'une urne contenant des boules numérotés de 1 à 100.

2. On considère une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10. Les boules numérotées de 1 à 2 sont vertes. Les boules numérotées de 3 à 6 sont rouges. Les boules numérotées de 7 à 10 sont noires.

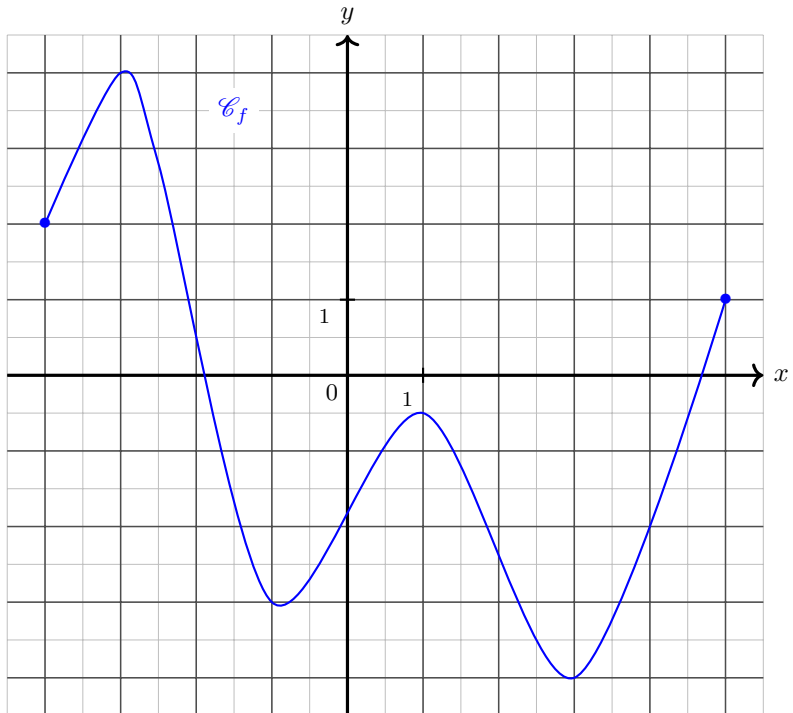
L'expérience consiste à tirer une boule de l'urne et à noter son numéro.

- (a) Donnez l'univers Ω de cette expérience. Quel est son cardinal ?
- (b) On note R l'événement « obtenir une boule rouge ». Donnez une définition en extension de R .
- (c) On note respectivement V et N les événements obtenir une boule verte et obtenir une boule noire.
Démontrez que V , N et R forment un système complet d'événements.
- (d) Soit A l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égale à 6.
Exprimez A grâce aux événements V , N ou R .
- (e) Rappelez le nom de \overline{V} par rapport à V et donnez-en une définition en extension.
- (f) Calculez la probabilité de N en supposant qu'il y a équiprobabilité entre les boules.
- (g) Si on tire successivement et avec remise 10 boules de l'urne, quelle est la probabilité de n'obtenir qu'une boule noire lors des 10 tirages ?

Exercice 7.

9,25 points

1. Tracez l'allure de la courbe représentative de la fonction racine cubique (en indiquant les éléments importants permettant de donner son allure).
2. On considère une fonction f définie sur l'ensemble $[-4; 5]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

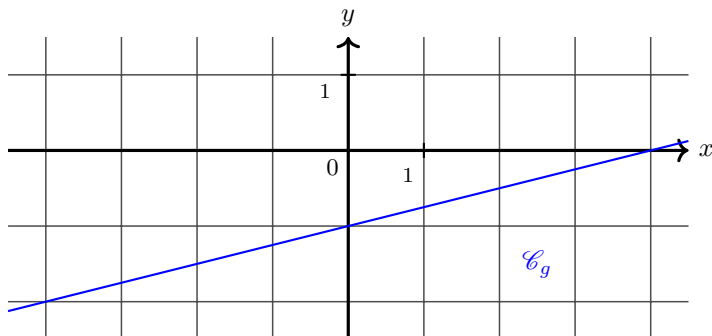


Répondez aux questions suivantes avec la précision permise par la lecture graphique.

- (a) Quelle est l'image de 2 par f ?
- (b) Donnez $f(-3)$.
- (c) Donnez l'ensemble des antécédents de 1,5 par f .
- (d) Déterminez $f^{-1}(\{-1\})$ puis $f^{-1}(\{5\})$.
- (e) Combien 1 admet-il d'antécédents par f ?
- (f) Dressez le tableau de variation de f .

3. Dans cette question on s'intéresse à des fonction affines.

Voici une représentation graphique de la fonction affine g .



- Donnez l'ordonnée à l'origine de g .
- Déterminez le coefficient directeur de g .
- Déduisez des questions précédentes l'expression algébrique (en fonction de x) de g .
- Après avoir choisi un repère, tracez sur votre copie la courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto -2x + 4$. Vous laisserez apparentes les traces de construction.

Exercice 8.

6 points

Exercice supplémentaire pour ceux qui auraient tout fini et s'ennuieraient.

Étudiez (domaine de définition, parité, limites et asymptotes, dérivée, variations, tangentes horizontales, valeurs remarquables) les fonctions r et s suivantes en concluant votre étude par une représentation graphique à main levée résumant votre étude.

$$r : x \mapsto \exp\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \quad \text{et} \quad s : x \mapsto 1 + x \ln(x+2).$$

