Loi de Poisson.

La loi de Poisson est « la loi des événements rares » : nombre de clients dans une file d'attente, nombre de particules rayonnées par un élément radioactif sur une période, nombres de soldats tués par des ruades de chevaux dans l'armée prussienne entre 1875 et 1894.

Elle a été introduite par Siméon Denis Poisson en 1837 pour modéliser les erreurs de jugement dans un procès.

Définition 1

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 1

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Exercice 1.

Pour chaque question reconnaître la loi de X et préciser les paramètres.

1. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.
2. Une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on tire au hasard successivement et avec remise 8 boules et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
3. Une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on tire au hasard successivement et sans remise 8 boules et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
4. Une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on effectue des tirages successifs et avec remise jusqu'à obtenir une boule rouge et on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
5. On range au hasard 10 boules dans 3 sacs de façon équiprobable et on note X le nombre de boules mises dans le premier sac.
6. Les 32 cartes d'un jeu sont alignées, faces cachées, sur une table de façon aléatoire ; on découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir la dame de cœur et on note X la variable aléatoire égale au nombre de cartes découvertes.
7. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet ; on tire au hasard une poignée de 5 jetons au hasard et on note X le nombre de voyelles obtenues.
8. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n $(n \in \mathbb{N}^*)$; on les tire au hasard un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectués.
9. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n $(n \in \mathbb{N}^*)$; on les tire au hasard un à un avec remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectués.
10. On pose n questions à un élève ; pour chaque question, r réponses sont proposées dont une et une seule est correcte ; l'élève répond au hasard à chaque question et on note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.