Loi binomiale.

I Définition de la loi binomiale.

Définition 1

Soient $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.
la variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de probabilité appelée *loi binomiale de paramètres n et p*.
On note alors $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Définition 2

On appelle *coefficient binomial k parmi n*, et on note $\binom{n}{k}$, le nombre de façons d'obtenir k fois la valeur 1 parmi n variables aléatoires suivant toutes des lois de Bernoulli.

Exemples.

1. Si $n = 2$ alors $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$ et $\binom{2}{2} = 1$.
2. Si $n = 3$ alors $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ et $\binom{3}{3} = 1$.
3. Si $n = 1$ alors $\binom{1}{0} = 1$ et $\binom{1}{1}$.
4. Par convention : $\binom{0}{0} = 1$.
5. Dans une répétition de 10 pile ou face $\binom{10}{3}$ est le nombre de façons d'obtenir 3 fois pile parmi les 10 lancés.

Proposition 1

Si $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors

(i) $S_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

(ii) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(S_n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

II Coefficients binomiaux.

Proposition 2

(i) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(ii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(iv) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Proposition 3 - Formule du binôme de Newton.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration

■

III Moments pour une loi binomiale.

Proposition 4

Si $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors

$$\mathbb{E}(S_n) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(S_n) = np(1-p).$$

IV Somme de variables suivant une loi binomiale.

Proposition 5

Si $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $R_\ell \hookrightarrow \mathcal{B}(\ell,p)$ alors

$$S_n + R_\ell \hookrightarrow \mathcal{B}(n+\ell,p).$$

Démonstration

■

Exercice 1.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p, avec $0 < p < 1$.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \ldots X_n$, et u_n la probabilité que S_n soit pair.

1. Précisez, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n.
2. Calculez u_1, u_2 et u_3.
3. Notons A_n l'événement « la variable aléatoire S_n est paire ». Ainsi : $u_n = \mathbb{P}(A_n)$.
   (a) Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(1_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}).$$
   (b) Déduisez de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_{n+1} = (1-2p)u_n + p.$$
   (c) Déduisez-en une expression de u_n en fonction de n, ainsi que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.