Loi géométrique.

Définition 1

Soient $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p et T la variable aléatoire qui à $(X_i)_i$ associe le premier indice i pour lequel $X_i = 1$.
On dit que T suit *la loi géométrique de paramètre p*.
On note alors $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemples.

1. On lance indéfiniment une pièce et on note T le numéro du lancé pour lequel on obtient pile pour la première fois.
2. On tire avec remise des boules d'une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules vertes. On note T le nombre de tirage nécessaire pour obtenir une boule rouge.
3.

Remarques.

1.

Proposition 1 - distribution de probabilité.

Si $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors

(i) $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T = n) = p(1-p)^{n-1}$.

Exemples.

1. La probabilité d'obtenir pile pour la première fois au dixième lancé est $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 0 = \frac{1}{2^{11}}$.
2.

Proposition 2

$\mathbb{P}(T > n) = (1-p)^n$.

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > n) &= \mathbb{P}\left(\overline{T > n}\right)\\ &= 1 - \mathbb{P}(T \leqslant n)\\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k)\\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1}\\ &= 1 - p\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1}\\ &= 1 - p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}\\ &= 1 - (1-(1-p)^n)\\ &= (1-p)^n\end{aligned}$$

■

Remarques.

1. $n \mapsto \mathbb{P}(T > n)$ est appelée la fonction de survie.
2. Il y a un lien avec la fonction de répartition : $F_T(k) = 1 - \mathbb{P}(T > n)$. Ce lien apparaît d'ailleurs dans la démonstration.

Proposition 3 - Caractérisation de la loi géométrique.

$\exists p \in [0;1]$, $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si et seulement si $\forall j,k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T > j + k | T > j) = \mathbb{P}(T > k)$.

Remarques.

1. La loi géométrique est dite sans mémoire. Ainsi dans pile ou face peu importe ce qu'il s'est passé avant chaque nouveau lancé pour aussi bien être considéré comme le premier. C'est comme si à chaque épreuve on recommençait tout depuis le début. Même si on obtenu 20 faces d'affilé la probabilité d'obtenir pile au lancé suivant reste la même qu'au début.
2. La loi géométrique est la loi d'attente du premier succès dans un processus sans mémoire.

Proposition 4

Soit $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(T) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Démonstration

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(T=k) &= \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1} \\ &= p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

On reconnaît en $\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}$ une série géométrique dérivée de raison $1-p \in]-1;1[$ donc cette série converge et sa somme est

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{(1-(1-p))^2}.$$

Enfin

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= p\frac{1}{(1-(1-p))^2} \\ &= \frac{1}{p}\end{aligned}$$

* D'après le théorème de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(T) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &=\end{aligned}$$

■

Exemples.

1. Il faut en moyenne 6 essais pour obtenir un 6 avec un dé non truqué.
2. Si $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ on appelle loi géométrique décalée la loi de $X = T-1$. Alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Remarques.

1. Ainsi une variable aléatoire suivant une loi géométrique admet des moments d'ordre 1 et 2 finis. En fait les moments de tous ordres d'une variable aléatoire sont finis.
2. De la variance on déduit l'écart-type.
3. $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T)\left(\mathbb{E}(T) - 1\right)$.