Indépendance.

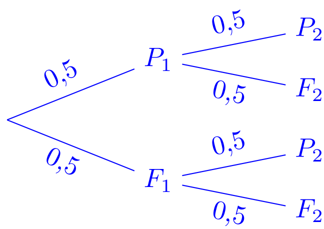
I Indépendance d'événements.

Définition 1

Deux événements A et B sont *indépendants* si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Exemples.

1. On lance un dé à dix faces. A : « obtenir un nombre inférieur ou égale à 3 » et B : « obtenir un un nombre pair ».
   $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}5$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}1$. Donc $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. A et B ne sont pas indépendants.
2. Dans un jeu de 32 cartes notons A : « obtenir une dame » et B :« obtenir un cœur ».
   $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{7}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{32}$. Donc $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$. A et B sont indépendants.
3. Deux lancers d'une pièce équilibrée sont schématisés par l'arbre :



   $\mathbb{P}(P_1) = 0{,}5$, $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$ et $\mathbb{P}(P_2) = 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}5$.
   Donc $\mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$.
   Autrement dit P_1 et P_2 sont indépendants.

Proposition 1

Si $\mathbb{P}(A) > 0$ alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$.

Démonstration

Supposons $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

■

Remarques.

1. Autrement dit la probabilité de B est indépendante du fait que l'on sait si B a été réalisé ou pas.
2. C'est cette propriété qui donne du sens à l'indépendance. Elle n'a pas été conservée comme définition car, d'abord, elle n'est pas symétrique (B ne dépend pas de A mais A dépend-t-il de B ?) et ensuite elle ne permet pas de considérer des événements de probabilité nulle ($\mathbb{P}(A) > 0$).

II Indépendances de variables aléatoires.

Définition 2

$X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) *indépendantes* si et seulement si pour toutes parties $A_1, \ldots, A_n$ respectivement de $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$

$$P\left((X_1 \in A_1) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n)\right) = P(X_1 \in A_1) \ldots P(X_n \in A_n).$$

Exemples.

1. On lance deux dés indépendants. $X_1 = 1$ si le résultat du premier lancé est pair et $X_2 = 1$ si le résultat du second est pair, $Y = 1$ si la somme des deux nombres est paire et 0 sinon.

   X_1, X_2 et Y sont deux à deux indépendants mais pas (mutuellement) indépendants.

Proposition 2

Deux variables de Bernoulli B_1 et B_2 sont indépendantes si et seulement si les événements $\{B_1 = 1\}$ et $\{B_2 = 1\}$ sont indépendants.

Démonstration

1. Si B_1 et B_2 sont indépendantes alors, par définition, en particulier les événements $\{B_1 = 1\}$ et $\{B_2 = 1\}$ sont indépendants.
2. Réciproquement supposons $\{B_1 = 1\}$ et $\{B_2 = 1\}$ indépendants : $\mathbb{P}(B_1 = 1)\mathbb{P}(B_2 = 1) = \mathbb{P}\left((B_1 = 1) \cap (B_2 = 1)\right)$.

■

Proposition 3

Les variables discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$,

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \ldots P(X_n = x_n).$$

Proposition 4

Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration

$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{i,j} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \times y_j \mathbb{P}(Y = y_j) = \left(\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)\right) \times \left(\sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_i)\right) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

■

Proposition 5

Si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Démonstration

Nous avons démontré que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ d'où le résultat avec la précédente proposition.

■

Proposition 6

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de second moment fini alors

(i) $E(X_1 \ldots X_n) = E(X_1) \ldots E(X_n)$,

(ii) $V(X_1 + \ldots X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$.

Démonstration

(i)

(ii) $V(X + Y) = V(X) + 2\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y)$.

■