Inégalités de concentration.

I Inégalité de Markov.

Théorème 1

Soient X une variable aléatoire discrète à valeurs positives et $a > 0$.

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Exemples.

1.

II Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Théorème 2

Soient X une variable aléatoire discrète et $t > 0$.

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{t^2}.$$

Exemples.

1. Si $t = 2\sigma(X)$ alors $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{(2\sigma(X))^2} = \frac{1}{4}$. La probabilité qu'une variable aléatoire prennent des valeurs éloignées de son espérance de plus du double de son écart-type est inférieure à 0,25.

Exercice 1.

Exercice 2.

Soit $n \geqslant 1$. Une urne contient une proportion inconnue p de boules blanches. On y effectue n tirages avec remise et on note X_n le nombre de boules blanches obtenues lors de ces n tirages.

1. Donnez la loi, l'espérance et la variance de X_n.
2. Notons $F_n = \frac{X_n}{n}$.
   (a) Déterminez $\mathbb{E}(F_n)$ et $\mathbb{V}(F_n)$.
   (b) Montrez :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(|F_n - p| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$
   (c) Déterminez les éventuels extrema de $t \mapsto t(1-t)$ sur $[0;1]$.
   (d) Déduisez des questions précédentes :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
3. Combien de tirages faut-il effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5 %, que la fréquence d'obtention de boules blanches au cours des tirages diffère de p d'au plus 10^{-2} ?