Moments de variables aléatoires.

I Espérance.

Définition 1

Soient X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$.
Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors on appelle espérance de X le nombre réel

$$E(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Si X est positive alors on définit l'espérance de X par

$$E(X) := \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Exemples.

1. Si

x_i	-2	0	1	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

alors $E(X) = -2 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{1}{10} = -0,2.$

2. Soit X la variable aléatoire dont la distribution $\left(3k, \frac{1}{2^{k+1}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{3k}{2^{k+1}} \\ &= \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

3. Soit X la variable aléatoire définie par sa distribution $\left(k, \frac{1}{k(k-1)}\right)_{k \geq 2}$. $\sum_{k \geq 2} \frac{k}{k(k-1)}$ diverge donc X admet une espérance infinie.

Remarques.

1. Lorsque l'espérance est finie l'espérance est la valeur moyenne que l'on obtient pour la variable aléatoire en recommençant un grand nombre de fois l'expérience.
2. Si X est finie alors $E(X) \in \mathbb{R}$.
3. Si X est positive et à support dénombrable, alors $E(X) \in [0; +\infty]$.

Proposition 1

(i) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $E(X) = p$.

(ii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$.

(iii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ alors $V(X) = \frac{a+b}{2}$.

II Moments d'ordre k.

Théorème 1 - Formule du transfert.

Pour toute fonction f définie sur $X(\Omega)$, $E(f(X)) = \sum_{i \in I} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$.

Exemples.

1.

Remarques.

1. Nous pouvons ainsi calculer les espérances de variables aléatoires construites à partir de variables aléatoires qui nous sont connues.

Définition 2

On appelle moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de la variable aléatoire discrète X l'élément de $[0, +\infty]$, $E(X^k)$.

Proposition 2

$E(X)^2 \leqslant E(X^2)$.

Démonstration

Admise.

■

Remarques.

1. Ainsi une variable aléatoire qui admet un moment d'ordre deux fini admet un moment d'ordre un fini.

Proposition 3

(i) $E(aX+b) = aE(X)+b$.

(ii) $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$.

(iii) Si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Exemples.

1. Dans un lancer de dé à 6 faces le gain Y égale à 8 euros pour un nombre inférieur ou égale à 2 et de -5 euros sinon. $Y = 13X - 5$ où $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\right)$. Donc $\mathbb{E}(Y) = 13\mathbb{E}(X) - 5 = 13 \times \frac{1}{3} - 5 = -\frac{2}{3}$.
2. Si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(p_2)$ alors $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = p_1 + p_2$.
3. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors $\mathbb{E}(X+Y) = p + \frac{n+1}{2}$.

Proposition 4

(i) Si X est certaine alors $V(X) = 0$.

(ii) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $V(X) = p(1-p)$.

(iii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

(iv) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ alors $V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

Exercice 1.

Une urne contient au départ une boule noire et une boule blanches indiscernables au toucher. On tire indéfiniment une boule avec, à chaque tirage, la remise de la boule tirée en jeu et l'ajout d'une boule noire supplémentaire.
Soient X le numéro du tirage de la première boule noire et Y celui du tirage de la première boule blanche.
Déterminez si elles existent les espérances de X et Y.

Exercice 2.

III Variance et écart-type.

Définition 3

Si X admet un moment d'ordre 2 fini alors on appelle variance de X le réel $V(X) := E\left((X - E(X))^2\right)$.
On appelle alors écart-type le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemples.

1. Si

x_i	-2	0	1	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

alors $V(X) = (-2-(-0,2))^2 \times \frac{1}{2} + (0-(-0,2))^2 \times \frac{1}{10} + (1-(-0,2))^2 \times \frac{3}{10} + (5-(-0,2))^2 \times \frac{1}{10} = 4,76$.

Proposition 5 - Formule de Koenig-Huygens.

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Remarques.

1. Permet de calculer plus simplement la variance.

Proposition 6 - Propriétés.

(i) $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

(ii) Si $V(X) = 0$ alors la variable X est constante en dehors d'un événement de probabilité nulle (variable aléatoire certaine).

Exercice 3.

Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \alpha 3^{-k}$.

1. Déterminez α.
2. X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ?
3. Prouvez que X admet une espérance et une variance finies et déterminez-les.

IV Problèmes.