# 72 Intégration, théorème fondamental.

## I Premier théorème.

Théorème 1 - Premier théorème fondamental de l'analyse.

Soient :

. $a < b$ des réels,

. $f$ une fonction continue sur $[a;b]$.

Si $F$ est la fonction définie sur $[a;b]$ par

$$\forall x \in [a;b],\ F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

alors

$$\forall x \in [a;b],\ F'(x) = f(x).$$

## II Lien entre les primitives d'un fonction.

Proposition 1

Les primitives d'une fonction diffèrent d'une constante.

# III Second théorème fondamental.

**Théorème 2 - Second théorème fondamental de l'analyse, formule de Newton-Leibniz.**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$ avec $a < b$ des réels et $F$ une primitive de $f$ sur $[a;b]$.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

**Exercice 1.**

Calculez les intégrales.

a) $I = \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x.$

b) $I = \int_{-1}^1 t\,\mathrm{d}t.$

c) $I = \int_{-1}^1 3x^2\,\mathrm{d}x.$

d) $I = \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x.$

e) $I = \int_0^3 4x^2\,\mathrm{d}x.$

f) $I = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

g) $I = \int_0^1 x^2 + x\,\mathrm{d}x.$

h) $I = \int_{-2}^1 x + \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

i) $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

j) $I = \int_{-3}^{-2} \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

k) $I = \int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$

l) $I = \int_0^8 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x.$

m) $I = \int_1^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x.$

n) $I = \int_{-1}^1 3x^2 + 2x + 1\,\mathrm{d}x.$

o) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(x) + 1\,\mathrm{d}x.$

p) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x.$

q) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(x) + 1\,\mathrm{d}x.$

r) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x.$

## Exercice 2.

Calculez les intégrales.

a) $I = \displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x.$

b) $I = \displaystyle\int_1^2 2x+1\,\mathrm{d}x.$

c) $I = \displaystyle\int_1^2 (2x+1)^2\,\mathrm{d}x.$

d) $I = \displaystyle\int_1^2 (2x+1)^3\,\mathrm{d}x.$

e) $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x.$

f) $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

g) $I = \displaystyle\int_1^2 \ln(2x+1)\,\mathrm{d}x.$

h) $I = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x.$

## Exercice 3.

a) $I = \displaystyle\int_0^1 5(3x^2+6)\left(x^3+6x+1\right)^4\,\mathrm{d}x.$

b) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{5x^4+3x^2}{x^5+x^3+1}\,\mathrm{d}x.$

c) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\left(\cos(x)\right)^3\,\mathrm{d}x.$

d) $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln(x))^2}{x}\,\mathrm{d}x.$

e) $I = \displaystyle\int_0^1 x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x.$

f) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2(x))\left(\tan(x)\right)^4\,\mathrm{d}x.$

g) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$

h) $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,\mathrm{d}x.$

## Exercice 4.

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin(x-\pi)\,\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2+2x\,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3x+2}\,\mathrm{d}x.$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2+2t-1\,\mathrm{d}x.$

g) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{u}{2}\right)\,\mathrm{d}u.$

h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3y)\,\mathrm{d}y.$

i) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{z^3}\,\mathrm{d}z.$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2t)-\sin(t)\,\mathrm{d}t.$

k) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin(3x)-4\cos(x)\,\mathrm{d}x.$

l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x.$

m) $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x.$

n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5}{2x-3}\,\mathrm{d}x.$

o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-3}{5}\,\mathrm{d}x.$

p) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x.$

q) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$

r) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

## Exercice 5. ⚽

Calculez les intégrales.

a) $\displaystyle\int_1^2 t^2 + t - \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ \mathrm{d}t.$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2t)\ \mathrm{d}t.$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t+2)^3}\ \mathrm{d}t.$

f) $\displaystyle\int_0^1 5t\mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t.$

g) $\displaystyle\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$ pour $0 < a \leqslant b$.

h) $\displaystyle\int_0^2 5\mathrm{e}^{3t}\ \mathrm{d}t.$

i) $\displaystyle\int_1^9 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$

j) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}u}{(2u+1)^2}.$

k) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x}}.$

l) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)\ \mathrm{d}x.$

m) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x+2}.$

n) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{3t-4}\mathrm{d}t.$

o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+3t}}.$

p) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x.$

q) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{t^3}{t^4+2}\ \mathrm{d}t.$

r) $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^2\ \mathrm{d}x.$

s) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\ \mathrm{d}x.$

t) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\ \mathrm{d}t.$

u) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t}\ \mathrm{d}t.$

v) $\displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t.$

# IV Problèmes.

Exercice 6.

Démontrez que la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x}$, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$, définie par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

Déduisez-en la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7.

On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$. Posons $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$.
Calculez $J$, puis $I+J$ et déduisez-en $I$.

Exercice 8.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$.
Montrez que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 9.

Soit $G : x \mapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Donnez l'ensemble de définition $\mathscr{D}_G$ de $G$ puis montrez que $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathscr{D}_G$.
2. Calculez $G'(x)$. Conclusion.