69 Intégration quadrature.

I Définition.

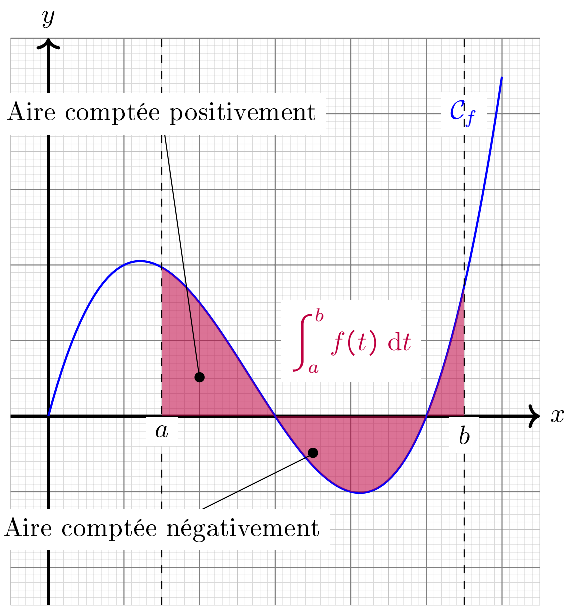
Définition 1

Soient :

. a et b des réels $a < b$,

. f une fonction continue sur $[a, b]$.

L'aire algébrique (positive ou négative) placée entre la courbe représentative d'une fonction f, l'axe des abscisses et deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, et notée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est appelée *intégrale de f sur* $[a; b]$.



Pour décrire en français la région du plan colorée ci-dessus nous dirons que c'est la surface comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

II Propriétés, formulaire.

Par convention $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Linéarité :

$$\int_a^b \lambda f(t) + g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Croissance (et donc positivité), pour $a < b$:

$$f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si la surface est réduite à un segment l'aire est nulle :

$$\int_a^b 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Inégalité triangulaire :

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Si f est continue positive sur $[a, b]$ et que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0$.

Inégalité de la moyenne : si $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a, b]$ alors

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M.$$

Exercice 1.

Au moyen de considérations géométriques élémentaires, pour $a < b$ et $m \in \mathbb{R}$, calculez :

a) $\mathscr{A}_1 = \int_a^b m\,\mathrm{d}t$ avec $m > 0$.

b) $\mathscr{A}_2 = \int_1^2 t\,\mathrm{d}t$.

c) $\mathscr{A}_3 = \int_2^3 m\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2.

Calculez $\displaystyle\int_{-1}^2 |t|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3.

Soit f la fonction affine par morceaux définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ -x+3 & \text{si } <\geqslant 1 \end{cases}$$

Calculez $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.

Démontrez que $-2 \leqslant \int_1^3 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \leqslant 2$.

Exercice 5.

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Démontrez que $0 \leqslant I \leqslant \frac{\pi^2}{8}$ sans calculer I.

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $[-1;0]$ par

$$f(x) = \frac{3x+4}{(x+2)^2}.$$

1. Dressez le tableau de variation de f.
2. Déduisez-en un encadrement de $f(x)$ sur $[-1;0]$.
3. Montrez que
$$1 \leqslant \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{9}{8}.$$