55 Inégalités de concentration.

I Inégalités de concentration.

Lemme 1 - Inégalité de Markov.

Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance finie.

Pour tout $a > 0$,
$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Théorème 1 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre deux.

Quel que soit $a \in \mathbb{R}$
$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

Exercice 1.

On lance 3 600 fois une pièce non truquée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans ce cas.
2. Minorez la probabilité que le nombre d'apparition de piles soit strictement compris entre 1 600 et 2 000.

Exercice 2.

On note X le nombre d'avions atterrissant sur un aéroport sur le créneau horaire 14h-15h. On estime que $\mathbb{E}(X) = 16$ et $\mathbb{V}(X) = 4$.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à X.
2. Déterminez une minoration de la probabilité qu'il arrive entre 12 et 20 avions sur cet aéroport entre 14h et 15h.

Exercice 3.

On considère une variable aléatoire X l'espérance μ et d'écart-type σ.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à X.
2. Déterminez les valeurs de σ pour que nous ayons $\mathbb{P}\left(|X - \mu| < 15\right) \geqslant 0,96$.

Exercice 4.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'objets produits par une entreprise. On sait que $\mathbb{E}(X) = 50$ et $\mathbb{V}(X) = 25$.

1. (a) Justifiez que $\mathbb{P}(X \geqslant 75) \leqslant \mathbb{P}(|X - 50| \geqslant 25)$.

   (b) Majorez la probabilité que la production du mois à venir dépasse 75 objets.

2. Minorez la probabilité que la production du mois à venir soit strictement comprise entre 40 et 60 matelas.

Exercice 5.

Soit $n \geqslant 1$. Une urne contient une proportion inconnue p de boules blanches. On y effectue n tirages avec remise et on note X_n le nombre de boules blanches obtenues lors de ces n tirages.

1. Donnez la loi, l'espérance et la variance de X_n.
2. Notons $F_n = \frac{X_n}{n}$.

   (a) Déterminez $\mathbb{E}(F_n)$ et $\mathbb{V}(F_n)$.

   (b) Montrez :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

   (c) Déterminez les éventuels extrema de $t \mapsto t(1-t)$ sur $[0;1]$.

   (d) Déduisez des questions précédentes :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3. Combien de tirages faut-il effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5 %, que la fréquence d'obtention de boules blanches au cours des tirages diffère de p d'au plus 10^{-2} ?