54 Familles libres et génératrices, bases

I Familles génératrices.

Définition 1

On dit qu'une famille de vecteurs $\mathscr{F} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ de $p \in \mathbb{N}$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si tout vecteur de F est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}$.

Exercice 1.

Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} ;\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donnez-en une famille génératrice.

II Familles soit libres soit liées.

La notion de famille liées généralise la notion de colinéarité à plus de deux vecteurs.

La notion de liberté a pu être rencontrée au lycée sous la dénomination de vecteurs linéairement indépendants.

Définition 2

On dit qu'une famille de vecteurs $\mathscr{F} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ de $p \in \mathbb{N}$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une *famille libre* de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la seule combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$ qui est nulle est celle dont tous les coefficients sont nuls.
Autrement dit si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \left(\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}\right) \Rightarrow \left(\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0\right).$$

Nous dirons que la famille $\mathscr{F}$ est *liée* si et seulement si elle n'est pas libre.

Exercice 2.

Soient $x_1 = (1,1,1)$, $x_2 = (1,0,0)$, $x_3 = (1,1,0)$, $x_4 = (0,0,1)$ et $x_5 = (2,2,0)$.
Déterminez si les familles suivantes sont libres ou liées.

a) (x_1, x_5).

b) (x_3, x_5).

c) (x_1, x_2, x_3).

d) (x_1, x_3, x_4).

e) (x_1, x_2, x_3, x_4).

Exercice 3.

Soient $k \in \mathbb{R}$, $\vec{x}_1 = (1,k,2)$, $\vec{x}_2 = (-1,8,k)$, $\vec{x}_3 = (1,2,1)$.
Déterminez les valeurs de k pour lesquelles la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est liée.

III Bases.

Définition 3

On dit qu'une famille de vecteurs $\mathscr{F} = \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\right)$ de $p \in \mathbb{N}$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une *base* d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si c'est une famille à la fois libre et génératrice de F.