53 Variance et écart-type.

Définition 1

Si X admet un moment d'ordre 2 fini alors on appelle variance de X le réel $V(X) := E\left((X - E(X))^2\right)$.

On appelle alors écart-type le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 1 - Formule de Koenig-Huygens.

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Proposition 2 - Propriétés.

(i) $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

(ii) Si $V(X) = 0$ alors la variable X est constante en dehors d'un événement de probabilité nulle (variable aléatoire certaine).

Proposition 3

(i) Si X est certaine alors $V(X) = 0$.

(ii) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $V(X) = p(1 - p)$.

(iii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \alpha 3^{-k}$.

1. Déterminez α.
2. X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ?
3. Prouvez que X admet une espérance et une variance finies et déterminez-les.

Exercice 2.

On souhaite démontrer que : si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ alors $V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ et $Y = X - a + 1$.

1. Déterminez le support (univers image) puis la loi de Y.
2. Déduisez-en l'espérance et la variance de X.

Exercice 3.

Soient $p \in]0;1[$ et X la variable aléatoire dont la loi est donnée par : $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = -1) = 1 - p$.

1. Calculez l'espérance et la variance de X.
2. On pose $Y = \dfrac{1+X}{2}$. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?
3. On pose $Z = \dfrac{1-X}{2}$. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 4.

Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \ldots, n$. Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs $1, 2, \ldots, n$. On suppose que la probabilité de succès au n-ième saut est de $p_n = \dfrac{1}{n}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement « le sauteur réussi son k-ième saut » et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimez $\{X = n\}$ en fonction des événements du type S_k, puis déterminez la loi de X. Vérifiez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.
2. Montrez que X possède une espérance finie et calculez-la.