51 Fonction réciproque.

I Bijection et continuité.

Proposition 1

La réciproque d'une fonction continue est continue.

II Théorème des valeurs intermédiaires : cas des fonctions monotones.

1 L'image continue d'un intervalle.

Proposition 2 - les différentes images continues d'intervalles.

Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle I. a et b sont dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ suivant les cas.

I	Croissante sur I, alors $f(I) =$	Décroissante sur I, alors $f(I) =$
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x \to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to b} f(x), f(a)\right]$
$]a, b]$	$\left]\lim\limits_{x \to a} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x \to a} f(x)\right[$
$]a, b[$	$\left]\lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to b} f(x), \lim\limits_{x \to a} f(x)\right[$

Exercice 1.

Dressez le tableau de variation de $\varphi : t \mapsto \dfrac{1 + t\ln(t)}{2}$ et explicitez son intervalle image, puis vérifiez qu'il est stable par φ.

2 Cas des fonctions strictement monotones.

Corollaire 1 - Unicité de l'antécédent.

Si f continue est strictement monotone sur $[a, b]$ alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Le résultat précédent montre qu'à chaque image par une fonction continue strictement monotone correspond un unique antécédent. Ce lien biunivoque nous montre l'existence d'une bijection.

Corollaire 2 - Théorème de la bijection.

Si f continue est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$).

Exercice 2.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrez que la fonction $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0; 1[$ puis déterminez l'expression de sa fonction réciproque.

III Réciproque et dérivation.

Proposition 3

Soient :

. $E \subset \mathbb{R}$,

. $f : E \to \mathbb{R}$ une application,

. $a \in E$.

Si

- f est strictement monotone,
- f est continue,
- f est dérivable en a,
- et $f'(a) \neq 0$

alors $f^{-1} : f(E) \to E$ est dérivable en $f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Proposition 4

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 5

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

IV Exercices.

Exercice 3.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 6x + 1$ une fonction définie sur $[-2; +\infty[$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution (dans $[2; +\infty[$).

Exercice 4.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 8x + 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-1; 1]$.

Exercice 5.

Soit $f : x \mapsto 4x^5 + 2x - 2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution que nous noterons α.
2. Déterminez un encadrement de α à 10^{-2}.

Exercice 6.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudiez les variations de g.
2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α. Donnez un encadrement de α à $0,1$ près.
3. Déterminez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

   (a) Calculez $f'(x)$ puis exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

   (b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 7.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

1. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminez le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 8.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1.$$

1. Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminez le signe de $f''(x)$ puis dressez le tableau de variation de f'.
3. (a) Montrez que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ donc on donnera en encadrement à $0,1$ près.

   (b) Déduisez-en le signe de f' sur $\mathbb{R}$

   (c) Dressez le tableau de variation de f.

Exercice 9.

On veut résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $3x - 2\cos(x) - 2 = 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = 3x - 2\cos(x) - 2$. Étudiez les variations de f.
2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, \pi]$. Donner à la calculatrice un encadrement à $0,1$ près de α.

Exercice 10.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^x$.

1. Justifiez que f induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à préciser.
2. On note g la bijection réciproque. Montrez que g est dérivable sur $]0; +\infty[$.
3. Étudiez la dérivabilité de g en 0.

Exercice 11.

Montrer que chacune des fonctions suivantes est une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera. Donnez les propriétés de f^{-1} sur J.

1. $f(x) = x^3 - 8x + 1$ et $I = [-1; 1]$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ et $I = [1; +\infty[$.

Exercice 12.

1. Montrez que la fonction f définie par $f(x) = \tan^3(x)$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ est une bijection de I dans un intervalle J à déterminer.
2. Étudiez la dérivabilité de f^{-1} sur J.
3. Déterminez $\left(f^{-1}\right)'(1)$.