50 Espérance.

I Espérance d'une variable aléatoire.

Définition 1

Soient X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$.
Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors on appelle espérance de X le nombre réel

$$E(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Si X est positive alors on définit l'espérance de X par

$$E(X) := \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Proposition 1

(i) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $E(X) = p$.
(ii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
(iii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

II Moments d'ordre k.

Théorème 1 - Formule du transfert.

Pour toute fonction f définie sur $X(\Omega)$, $E(f(X)) = \sum_{i \in I} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$.

Définition 2

On appelle moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de la variable aléatoire discrète X l'élément de $[0, +\infty]$, $E(X^k)$.

Proposition 2

$E(X)^2 \leqslant E(X^2)$.

Proposition 3

(i) $E(aX + b) = aE(X) + b$.

(ii) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

(iii) Si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Exercice 1.

Une urne contient au départ une boule noire et une boule blanches indiscernables au toucher. On tire indéfiniment une boule avec, à chaque tirage, la remise de la boule tirée en jeu et l'ajout d'une boule noire supplémentaire.
Soient X le numéro du tirage de la première boule noire et Y celui du tirage de la première boule blanche.
Déterminez si elles sont finies les espérances de X et Y.

Exercice 2.