49 Application dérivée.

I Nombre dérivé.

Définition 1

Soient :

. $a < b$ des réels,

. $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une application.

f est dite *dérivable à droite en a* si et seulement si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a par valeurs supérieures.

Dans ce cas, cette limite est appelée *le nombre dérivé de f à droite en a*, et on note :

$$f'_d(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Exercice 1.

Soit f l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, et $f(0) = 1$.

1. Démontrez que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudiez la dérivabilité de f en 0.

Définition 2

Soient :

. f une application définie sur $E \subset \mathbb{R}$,

. $a \in E$ tel que f soit définie dans un voisinage ouvert de a.

f est *dérivable en a* si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées

(i) f est dérivable à droite en a,

(ii) f est dérivable à gauche en a,

(iii) $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Si f est dérivable en a alors on appelle *nombre dérivé de f en a* le nombre noté

$$f'(a) := f'_d(a) = f'_g(a).$$

Proposition 1

Soient :

. f une application définie sur $E \subset \mathbb{R}$,

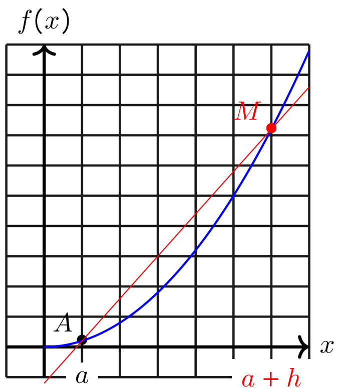
. $a \in E$ tel que f soit définie sur un voisinage ouvert de a.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

II Tangente.

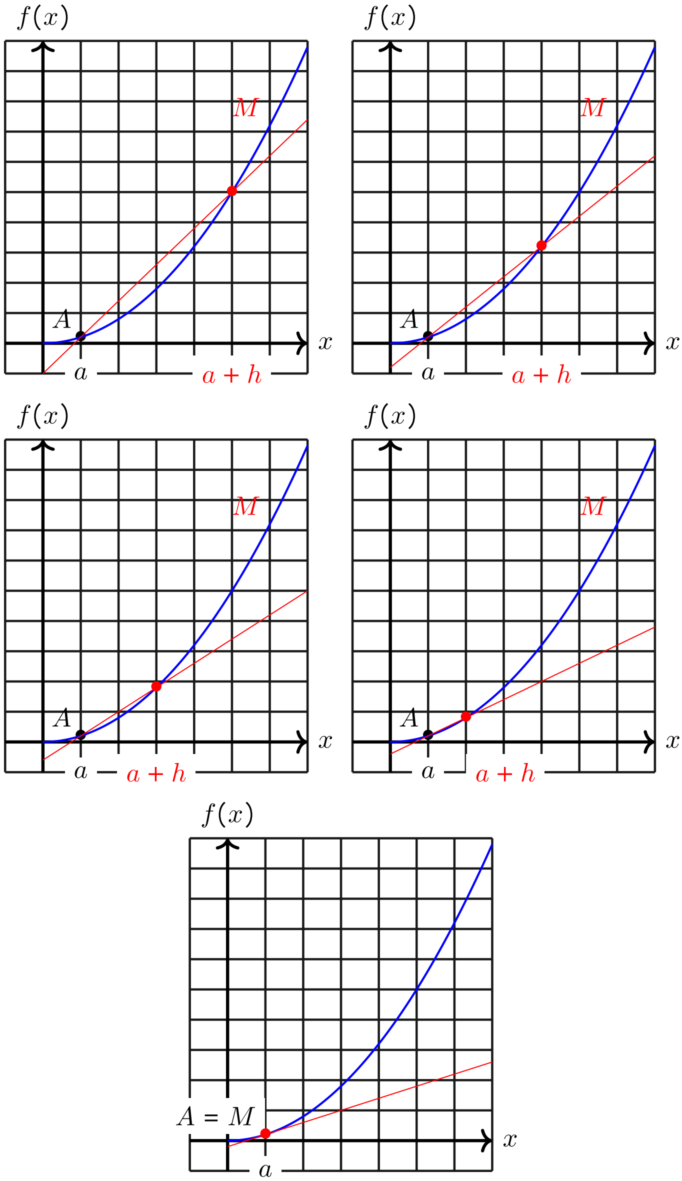
Comme bien souvent en mathématique c'est un point de vue géométrique qui est privilégié pour se représenter les objets. C'est aussi celui qui se généralise le plus simplement

Rappelons que le taux d'accroissement correspond au coefficient directeur d'une certaine droite. Graphiquement, le taux d'accroissement d'une fonction f entre a et $a+h$ est le coefficient de la droite dessinée en rouge.



Si nous remplaçons h par 0, alors les deux points sont confondus et parler d'une droite n'a plus aucune sens. Nous retrouvons le problème rencontré avec le taux d'accroissement : nous ne pouvons pas remplacer h par 0.

De la même façon nous allons rendre h de plus en plus petit. Graphiquement cela revient à dire que nous rapprochons le point M de A.



Nous obtenons une droite qui semble posée sur la courbe représentative de la fonction. Cette droite sera appelée une *tangente* de la courbe.

Son coefficient directeur est le taux d'accroissement limite obtenu lorsque h se rapproche de 0. Autrement dit le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé.

La courbe et la tangente semblent se confondre au voisinage du point A. Ceci correspond à un outil classique en mathématique, le développement limité. Ici, la fonction f, pour des valeurs de x pas trop loin de a, est semblable à une fonction affine : "$f(x) \approx ax+b$". Cette approximation est extrêmement riche en applications sera revue dans le paragraphe suivant

Sécantes et tangente : illustration avec geogebra (télécharger le fichier : lien).

Définition 3

Soient :

. f une application définie sur $E \subset \mathbb{R}$,

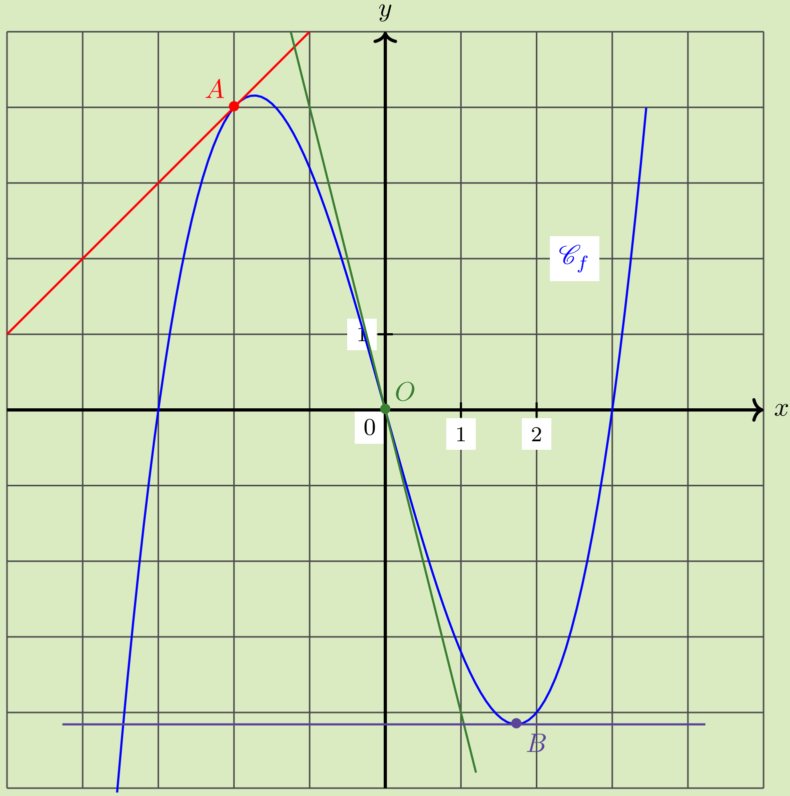
. $a \in E$ tel que f soit définie et dérivable dans un voisinage ouvert de a.

On appelle *tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$* la droite d'équation cartésienne

$$y = f'(a) \times (x-a) + f(a).$$

Exercice 2.

On a dessiné ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que les tangentes à cette courbe aux points $A(-2;4)$, $O(0,0)$ et $B(\sqrt{3}; 0,4\sqrt{3}^3 - 3,6\sqrt{3})$.



1. Déterminez les nombres dérivés de f en -2, en 0 et en $\sqrt{3}$.
2. Déduisez-en, les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_f$ en A, O et B.

Exercice 3.

Soit f une fonction dérivable en 3 et telle que $f(3) = 4$ et $f'(3) = \frac{1}{3}$.
Tracez la tangente au graphe de f en 3 puis proposez une allure possible du graphe de f au voisinage de 3.

III Fonction dérivée.

1 Définition.

Définition 4

Soit :

. f une application définie sur $E \subset \mathbb{R}$.

Nous dirons que f est ***dérivable sur E*** si et seulement si, pour tout $a \in E$, f est dérivable en a.

Dans ce cas on appelle fonction dérivée de f la fonction :

$$f' := \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

Proposition 2

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $f_n : x \mapsto x^n$ l'application définie sur $\mathbb{R}$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus

(i) $f_0' = 0$.

(ii) et si $n > 0$ alors $f'(x) = nx^{n-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 3

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ l'application définie sur $\mathbb{R}^*$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{n}{x^{n+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Proposition 4

La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.

Proposition 5

La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.

Proposition 6

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

2 Une condition suffisante de continuité.

Proposition 7 - condition suffisante de continuité.

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

3 Calculer une fonction dérivée.

Proposition 8 - Linéarité de la dérivation.

Soient :

. f et g des fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$,

. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables sur E alors $\lambda f + g$ est dérivable sur E et

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

Proposition 9 - Dérivation d'un produit.

Soient :

. f et g des fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables sur E alors fg est dérivable sur E et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Proposition 10 - Dérivation de l'inverse.

Soient :

. g une fonction définie sur $E \subset \mathbb{R}$.

Si g est dérivable sur E et que g ne s'annule pas sur E alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur E et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

Corollaire 1 - Dérivation d'un quotient.

Soient :

. f et g des fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables sur E et que g ne s'annule pas sur E alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur E et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proposition 11

La fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Exercice 4.

Étudier la dérivabilité de la fonction cotangente définie par $\text{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$ sur $]0, \pi[$.

Exercice 5.

4 Fonctions composées.

Proposition 12

Soient :

. $E \subset \mathbb{R}$,

. $F \subset \mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application,

. $g : F \to \mathbb{R}$ une application,

. $a \in E$.

Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = \left(g' \circ f(a)\right) \times f'(a).$$

Proposition 13

La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Corollaire 2

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

. $f_n : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ si n est pair est $\mathbb{R}$ sinon.

- Si n est pair alors f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Si n est impair alors f_n est dérivable sur $\mathbb{R}*$.

Pour tout réel x du domaine de dérivabilité de f_n

$$f_n'(x) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x}^{n-1}}.$$

IV Exercices.

Exercice 6.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudiez les variations de g.
2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α. Donnez un encadrement de α à $0,1$ près.
3. Déterminez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

   (a) Calculez $f'(x)$ puis exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

   (b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 7.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

1. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminez le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 8.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1.$$

1. Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminez le signe de $f''(x)$ puis dressez le tableau de variation de f'.
3. (a) Montrez que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ donc on donnera en encadrement à $0,1$ près.

   (b) Déduisez-en le signe de f' sur $\mathbb{R}$

   (c) Dressez le tableau de variation de f.

Exercice 9.

On veut résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $3x - 2\cos(x) - 2 = 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = 3x - 2\cos(x) - 2$. Étudiez les variations de f.
2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, \pi]$. Donner à la calculatrice un encadrement à $0,1$ près de α.