47 Continuité sur un intervalle.

I Les théorèmes.

Théorème 1 - des valeurs intermédiaires.

L'image continue d'un intervalle I est un intervalle noté $f(I)$.
De plus l'image continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

Corollaire 1 - des valeurs intermédiaires.

Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Exercice 1.
Montrez que tout polynôme P de degré impair possède au moins une racine réelle.

Théorème 2 - continuité et extrema.

Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 2.
Démontrez que la fonction tan admet un maximum et un minimum sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice 3.
Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$. On admet que f est croissante sur $]2, +\infty[$.
Justifiez que l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ admet au moins une solution.