

46 Loi de Bernoulli.

Rappel va suivant une loi uniforme discrète.

Définition 1

On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$* et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si

- (i) $X(\Omega) = \{0; 1\}$,
- (ii) $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et (évidemment) $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Exemples.

1. Pour un lancer de pile ou face $\Omega = \{P, F\}$ et X la variable aléatoire qui à pile associe 0 et à face associe 1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Si $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}$ X ne suit pas la loi de Bernoulli.
3. Le tableau donnant une loi de probabilité suivant ne correspond pas à une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli.
4. Remarquons que si nous avons deux valeurs qui ne sont pas 0 et 1 nous sommes tentés de définir une nouvelle variable aléatoire qui elle sera de Bernoulli. Plutôt que cette démarche nous allons construire e nouvelle variable aléatoire avec des variables de Bernoulli. Répétition de pile ou face, etc.

Proposition 1

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

La fonction de répartition de la variable aléatoire X est

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Représentation graphique.

Définition 2

Soient :

- . Ω un ensemble,
- . $A \subset \Omega$.

On appelle *fonction indicatrice de A* la fonction définie par

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} \Omega & \rightarrow & \{0; 1\} \\ \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{cases} .$$

Remarques.

1. La fonction indicatrice de l'ensemble dépasse le cadre des probabilités et apparaît dans de nombreux domaines des mathématiques.

Proposition 2

Soient :

- . $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,
- . $A \in \mathcal{E}$.

L'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de l'événement A est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.