45 Nombres complexes.

I Généralités.

1 Historique.

D'abord introduit par Cardan comme une astuce de calcul, les racines carrées de nombres négatifs furent appelés des nombres imaginaires.

Il furent utilisés pour résoudre des équations.

Argan trouva leur application à la géométrie. Ils occupèrent dès lors une place de plus en plus importante.

Il furent ensuite appelés nombres complexes par Gauss.

Euler introduisit la notation $i = \sqrt{-1}$.

Exemples.

1. $\sqrt{-25}$.
2. $\sqrt{-3}$.
3. $\sqrt{49} + \sqrt{-4}$.

Les précédents calculs reposent sur un objet qui n'existe pas à savoir le nombre i. Donnons un sens à ce nombre en construisant l'ensemble de tous les nombres que nous pourrons construire grâce à lui.

2 Construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$.

La construction de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ se fait à partir de $\mathbb{R}^2$: on additionne des couples de nombres réels et on les multiplie par des nombres réels mais on introduit une multiplication qui n'est pas la multiplication matricielle.

On définit l'opération :

$$(x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

Interprétation du couple (x, y) : x est un nombre au sens habituel que nous appellerons la partie réelle du nombre complexe et y est un nombre réel que nous appellerons la partie imaginaire du nombre complexe. Enfin nous écrirons $x + iy := (x, y)$. Cette écriture est appelée *écriture algébrique* du nombre complexe.

On remarque en particulier avec cette opération que $(0, 1) \times (0, 1) = (1, 0)$ s'interprète comme $i \times i = -1$ (*i.e.* $i^2 = -1$).

II Forme algébrique.

Exercice 1.

Donnez l'écriture algébrique du nombre complexe z en précisant sa partie réelle, $\mathrm{Re}(z)$, et sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(z)$.

a) $z = 3 + 4 + 7i - 5 + 11i - i$.

b) $z = -4(5 - 7i)$.

c) $z = i(2 + 3i)$.

d) $z = (-5 + 2i)(1 - 4i)$.

e) $z = (-1 - 3i)^2$.

f) $z = (1 + i)^3$.

L'interprétation géométrique des nombres complexes découle naturellement de construction de $\mathbb{C}$ précédente.

Au nombre complexe $z = x + iy$ on associe le couple (x, y). On peut donc représenter z par le point $M(x, y)$ ou par le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Réciproquement le nombre complexe que l'on peut associer à un point (respectivement à un vecteur) dans un repère orthonormé est appelé *l'affixe* du point (respectivement du vecteur).

III Nombre conjugué.

Définition 1

Nous appellerons *nombre conjugué* du nombre complexe $z = x + iy$ le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.

Remarques.

1. D'un point de vue géométrique un nombre complexe et son conjugué sont les affixes de points symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Exemples.

1.
2.
3. Produit d'un nombre et de son conjugué.
4. Le nombre conjugué permet de trouver l'écriture algébrique de l'inverse d'un nombre complexe.
   Ainsi pour $z = 2 + 3i$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} =$
5. Plus généralement le nombre conjugué permet de trouver l'écriture algébrique d'un quotient de nombres complexes.

Proposition 1 - Propriétés de la conjugaison.

(i) $\overline{\alpha z} = \alpha \overline{z}$.

(ii) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

(iii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

(v) Si $z' \neq 0$ alors $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

(vi) $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$ et $\text{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.

(vii) $z - \overline{z} = 2i\text{Im}(z)$ et $\text{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

(viii) $z \times \overline{z} = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$

(ix) $\overline{\overline{z}} = z$.

Remarques.

1. Ainsi la conjugaison est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $\overline{\overline{z}} = z$ signifie que l'application de conjugaison est une involution de $\mathbb{C}$.

Exercice 2.

Donnez l'écriture algébrique des nombres suivants.

a) $z = \overline{-5 + 8i}$.

b) $z = \dfrac{1}{8 - 6i}$.

c) $z = \dfrac{4 + 2i}{2 - 3i}$.

d) $z = \overline{(2 - 7i)(3 + 2i)}$.

e) $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$.

Exercice 3.

Résolvez les équations d'inconnues z.

a) $(1 - 2i)z = 3 + i$.

b) $2z - 1 = -2iz + 3i$.

c) $2z^2 + z + 1 = 0$.

d) $z^2 - 3z - 4 = 0$.

e) $z^2 - 2z + 10 = 0$.

f) $5z^2 - 4z + 1 = 0$.

Exercice 4.

Écrivez le conjugué de Z en fonction du conjugué de z.

a) $Z = 3 + 4iz$. b) $Z = \dfrac{3+iz}{2-z}$. c) $Z = (3 - iz)(2 + z)$.

Exercice 5.

Soit $z = x + iy$ avec x et y des réels. On note $Z = 2z - i\overline{z} + 3$.

1. Déterminez en fonction de x et de y les parties réelle et imaginaires de Z.
2. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z = 0$ d'inconnue $z = 0$.

IV Module.

Introduire les coordonnées polaires pour introduire l'écriture trigonométrique puis le module comme la distance.

Définition 2

Nous appellerons *module* du nombre complexe $z = x + iy$ (avec x et y réels) le nombre réel positif :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemples.

1. $|-1+3i| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2}$.
2. $|4| = 4$ et $|-4| = 4$ et $|4i| = 4$.

Remarques.

1. Le module d'un nombre complexe est un nombre réel positif.
2. Pour les nombres réels module et valeur absolue se confondent.
3. Si M est un point d'affixe z alors $|z| = OM$ où O est l'origine du plan complexe. Le module, comme la valeur absolue, s'interprètent comme une distance.

   Pour des points $A(z_A)$ et $B(z_B)$, $|z_A - z_B| = d(A, B)$.

Proposition 2

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, A et B des points d'affixes respectives z_A et z_B.

(i) $AB = |z_B - z_A|$.

(ii) $|z|^2 = z \times \overline{z}$.

(iii) $|z \times z'| = |z \times z'|$.

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.

(v) $|\overline{z}| = |z|$.

(vi) $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

(vii) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

V Forme trigonométrique.

Accompagner la définition ci-dessous d'un schéma.

Définition 3

Soit $M(z)$ un point du plan complexe avec $z \neq 0$.

Si (r, θ) sont des coordonnées polaires de M alors $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Cette écriture de z est appelée *la forme trigonométrique de* z et le nombre θ est appelé *un argument de* z et on note $\theta = \arg(z)$.

Remarques.

1. $r = |z|$.
2. Il est possible de trouver un argument, θ, d'un nombre complexe z à partir de son expression algébrique $x + iy$ car
   $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
3. Il est donc toujours possible de trouver la forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Exemples.

1. $z = 1 + i$.

Exercice 6.

CNED 200 page 140 exo 65

Donnez la forme trigonométrique de z.

a) $z = 2 - 2i\sqrt{3}$.

b) $z = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Exercice 7.

CNED 200 page 140 exo 67

On considère les nombres complexes $z = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = 1 - i$.

1. Donnez la forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$.
2. Donnez une forme trigonométrique de $\dfrac{z}{z'}$.
3. Déduisez-en que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

Proposition 3

Si $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan d'Argan-Cauchy alors

(i) pour $A \neq B$, $\left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)$.

(ii) pour $A \neq B$ et $C \neq D$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.

VI Forme exponentielle.

Si exponentielle complexe est introduite comme une notation il faut justifier que la notation est cohérente avec les formules algébriques d'exponentielles et donc il faut connaître les formules d'additions qui, dans cette leçon, découlent des formules d'Euler.

Définition 4

En admettant que l'écriture $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ a un sens, pour tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ, on appelle *forme exponentielle de z* l'écriture $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$.

Exemples.

1. $\mathrm{e}^{i0} =$.
2. $\mathrm{e}^{i\pi} =$.
3. $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$.
4. $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.
5. $z = \sqrt{3} - i$.

Remarques.

1. Ll est toujours possible de trouver une telle écriture au même titre que la forme trigonométrique.

Proposition 4

(i) $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta}$.

(ii) $\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right| = 1$.

(iii) $\mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$.

Exemples.

1. Dans l'exercice 6 nous avons obtenu : $z = 2-2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et $z' = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
   $z \times z' =$.

VII Formule de Moivre.

Proposition 5

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \quad \text{et} \quad (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Exemples.

1. Exprimons $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\cos^3(x)$.

Exercice 8.

Exprimez $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

VIII Formules d'Euler.

Proposition 6

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Remarques.

1. C'est formules permettent de linéariser les expressions trigonométriques. Une expression trigonométrique est dit linéarisée lorsqu'elle s'exprime comme somme de termes de la forme $a\cos(ux)$ ou $b\sin(vx)$ avec a, b, u et v des réels.

Exemples.

1. Linéarisation de $\cos^2(x)$.
2. Linéarisation de $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$.

Exercice 9.

Linéarisez $\sin^3(x)$.

IX Racine n-ième d'un nombre complexe.

Définition 5

Soient Z un nombre complexe et n un entier naturel non nul.
On appelle *racine n-ième de* Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Remarques.

1. Nous ne pouvons pas dire la racine n-ième mais bien une racine n-ième.

Proposition 7

Soient n un entier naturel non nul et Z un nombre complexe dont un argument est θ.
L'ensemble des racines n-ième de Z est l'ensemble des nombres complexes $\sqrt[n]{|Z|}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Démonstration

■

Exemples.

1. Racines carrées de $Z = 1 + i\sqrt{3}$.
2. Racines n-ième de 1.

X Formules d'addition de cos, sin et tan.

Proposition 8

(i) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
(ii) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
(iii) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

Démonstration

Découle des formules d'Euler.

■

XI Exercices.

Exercice 10.

Déterminez la forme exponentielle de $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

Exercice 11.

Soit $\theta \in]0, \pi[$.

1. Calculez $\sum k = 0^{n-1}\mathrm{e}^{ik\theta}$.
2. Déduisez-en $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta)$.

Exercice 12.

Démontrez que z est une racine n-ième de l'unité alors $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.

Exercice 13.

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$.