43 Fonction de répartition.

I Définition.

Définition 1

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

On appelle *fonction de répartition de X*, l'application

$$F_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array} \right. .$$

II Liens entre loi de probabilité et fonction de répartition.

Proposition 1

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

$$F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \in \mathcal{X} \\ x_i \leqslant x}} \mathbb{P}(X = x_i).$$

Proposition 2

Soient
. $\mathcal{X} \subset \mathbb{N}$,
. $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1)$ et donc

$$F_X(n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k).$$

Proposition 3

$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Proposition 4

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

(i) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$,
(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$,
(iv) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ a < x}} F_X(x) = F_X(a)$.

Définition 2

Le *quantile d'ordre α de X*, appelé aussi α-quantile, est l'ensemble $Q_X(\alpha) = F_X^{-1}(\{\alpha\})$.