42 Continuité.

I Continuité : définition.

Pour des raisons de cohérence des définitions nous aurons besoin de pouvoir dire qu'un nombre a n'est pas sur une borne de l'ensemble $\mathscr{D}$. Pour cela nous dirons que le nombre a est *intérieur à $\mathscr{D}$* s'il existe un voisinage ouvert de a inclus dans $\mathscr{D}$.

Définition 1

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. a un point intérieur à $\mathscr{D}$.

Une application f est dite continue en $a \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

Proposition 1 - Caractérisation de la continuité.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. a un point intérieur à $\mathscr{D}$.

f est continue en a si et seulement si f admet des limites réelles à droite et à gauche en a égales à $f(a)$.

Exercice 1.

Démontrez que $f : x \mapsto 2e^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue en 0.

Exercice 2.

Démontrez que $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ n'est pas continue en 0.

Exercice 3.

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrez que f n'est pas continue en 0.

Notre définition de la continuité nécessite de regarder un voisinage autour de a. Ce n'est pas toujours possible : $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 & & \end{array} \right.$ est continue sur $]0;1[$ mais nous ne pouvons pas dire si elle continue en 0.

Pourtant la fonction carré étant continue sur $\mathbb{R}$ il serait cohérent que nous puisions dire que g est continue en 0.

Définition 2

Soient :

. a et b des réels tels que $a < b$,

. f une application définie sur $[a, b[$.

Nous dirons que f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} f(a)$.

II Les fonctions continues de référence.

Proposition 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+$.

(i) La fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) La fonction $x \mapsto x^a$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

(iv) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(v) La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(vi) Les fonctions exp et ln sont continues sur leurs domaines de définitions.

(vii) Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

(viii) La fonction tangente est continue sur son domaine de définition.

III Opérations sur les fonctions continues.

Proposition 3 - opérations sur les fonctions continues.

Soient :

. I un intervalle ouvert,

. $a \in I$,

. f et g des fonctions continues en a,

. $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $\lambda f + g$ est continue en a.

(ii) $f \times g$ est continue en a.

(iii) Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\frac{1}{g}$ est continue en a.

(iv) Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.

Proposition 4 - Continuité et composition.

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Exercice 4.

Soit a un réel strictement positif et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^a & \text{si } x \geqslant 0 \\ -|x|^a & \text{si } x < 0 \end{array} \right. .$$

Montrer que f_a est continue et impaire.

Exercice 5.

Dans chacun des cas suivants étudiez le continuité de f en a.

1. $a = 2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$ pour $x \neq 2$ et $f(2) = 5$.
2. $a = 1$ et f est définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+5} - 3}{x - 1}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = \frac{1}{3}$.
3. $a = 0$ et f est définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x) - 2\tan(x)}{x}$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f(0) = -1$.

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ pour $x \neq -2$ et $f(-2) = 0$.
f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7.

Soient a et b deux réels, on donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax - 1 & \text{, si } x \in]-\infty, -1[\\ 3x - 2 & \text{, si } x \in [-1; 2[\\ b(x^2 - 5x + 6) & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}.$$

Est-il possible de trouver a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?

IV Théorème du point fixe.

Théorème 1

Si f est continue sur I , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice 8.

Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n où f est la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

1. Justifiez que (u_n) est bien définie.
2. Montrez que f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.
3. Montrez que la suite (u_n) est convergente.
4. Déterminez la limite de (u_n).