41 Système, noyau et image.

Nous avons qu'un système linéaire peut être associé à une matrice comme à une application linéaire.

Nous pourrons donc parler du noyau ou de l'image d'un système linéaire ou d'une matrice en sous-entendant ceux de l'application linéaire.

I Les systèmes $AX = 0$ avec moins de lignes que de colonnes.

Proposition 1

Si le système linéaire $AX = 0$ à moins de lignes que de colonnes, alors l'ensemble des solutions du système, le noyau de A, n'est pas $\{\vec{0}\}$; il comporte des solutions non nulles.

II Les images par une matrice ou une application linéaire.

On reprend la notion vue pour toutes les applications. Si A une partie (un ensemble) du domaine de définition de $f : E \to F$ alors on appelle image de A par f l'ensemble $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ f(x) = y\}$. C'est l'ensemble regroupant toutes les images d'éléments de A.

Définition 1

On appelle *image* d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^m).$$

On appelle image d'une matrice ou d'un système linéaire l'image de l'application linéaire associée.

Proposition 2

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. φ_A l'application linéaire associée à A,

. C_i le vecteur colonne de la i-ième colonne de A.

$\mathrm{Im}(\varphi_A)$ est formé de combinaisons linéaires des vecteurs colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_m$.

Exercice 1.

1. Déterminez une représentation paramétrique de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

   (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Déterminez un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$. Puis déduisez-en la matrice dont $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ est le noyau.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 28 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.