40 Comparaison de séries.

I Convergence et opérations.

1 Étude de la convergence pour une série positive.

Proposition 1 - Lemme fondamental.

(i) Une série à termes positifs converge ou tend vers $+\infty$.

(ii) Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

2 Opérations sur les séries.

Il existe bien entendu des produits sur les séries. Cependant leur définition est complexe et nous laisserons donc le produit de côté il nous reste la somme et la multiplication par un réel (donc les combinaisons linéaires.

Nous noterons $\alpha \sum u_n + \sum v_n$ la série $\sum \alpha u_n + v_n$.

Proposition 2 - Somme de série et nature.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors $\sum \alpha u_n + v_n$ converge.
S'il y a convergence alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha u_n + v_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Une petite extension du résultat précédent mais surtout une façon de voir différemment les choses.

Proposition 3

On ne change pas la nature d'une série en lui ajoutant une série convergente.

II Résultats de comparaisons.

Proposition 4

Soient (u_n) et (v_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

(i) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge. De plus :

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice 1.

Soit (u_n) une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)!u_n \leqslant 1$ et $\sum u_n$ converge. Montrez que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \mathrm{e} - 1$.

Exercice 2.

Démontrez que la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n!}$ converge.

Proposition 5

Si (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs, $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Exercice 3.

Déterminez la nature de la série $\sum \mathrm{e}^{-n^2}$ en remarquant $\mathrm{e}^{-n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 4.

Montrez que la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n2^n}$ est convergente.

Exercice 5.

Montrez que la série $\sum \dfrac{n\sqrt{n}}{2^n + \sqrt{n}}$ est convergente.

Proposition 6

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes strictement positifs et $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 6.

Déterminez la nature de la série $\sum \dfrac{n+1}{n^2}$.

Exercice 7.

Déterminez la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 8.

Déterminez la nature de la série $\sum \dfrac{2n}{n^3+1}$.

III Exercices.

Exercice 9.

Déterminez la nature de la suite de terme général u_n.

a) $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$.

b) $u_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n}$.

c) $u_n = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$.

d) $u_n = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}\right)$.

e) $u_n = \frac{2^n}{1+n!}$.

f) $u_n = \frac{1}{n^2\ln(n)}$.

g) $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$.

h) $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

i) $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

j) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$.

k) $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$.

Exercice 10.

Démontrez la convergence et déterminez (si possible) la somme des séries de terme général u_n.

a) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geqslant 1$.

b) $u_n = \frac{n^2 2^n}{n!}$.

c) $u_n = \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$.

d) $u_n = \text{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 11.

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs convergente. Déterminez la nature des séries dont le terme général est :

a) $u_n = \frac{a_n}{1+a_n}$.

b) $v_n = \mathrm{e}^{a_n} - 1$.

c) $w_n = \frac{1-\cos(a_n)}{a_n}$.

d) $x_n = a_n^2$.

Exercice 12.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

1. Montrez : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
2. En remarquant un télescopage déduisez-en que la série $\sum u_n$ converge et calculez sa somme.

Exercice 13.

Exercice 14.