# 39 Loi d'une variable aléatoire.

## I Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Définition 1

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$ où $I$ est un ensemble au plus dénombrable,
. $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

On appelle *loi de probabilité de la variable aléatoire* $X$ l'ensemble des couples $(x_i, \mathbb{P}(X = x_i))$ pour $i \in I$.

Exercice 1.

On considère une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4 et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour $k \geqslant 1$, on note $Z_k$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des $k$ premiers tirages.

Pour $k \geqslant 2$ montrez que $\mathbb{P}(Z_k = 2) = 6\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

Proposition 1

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$ où $I$ est dénombrable,
. $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

Si $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ alors $\mathbb{P}\left(X \in \mathcal{X}'\right) = \sum_{x \in \mathcal{X}'} \mathbb{P}(X = x)$.

Corollaire 1

(i) Si $I$ est fini alors $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.
(ii) Si $I$ est infini alors $\sum_i \mathbb{P}(X = x_i)$ est une série convergente de somme 1.

**Exercice 2.**

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\alpha n}{2^n}.$$

Déterminez $\alpha$.

## II Définir une variable aléatoire à partir d'une distribution.

**Théorème 1**

Soient :

. $(p_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs,

. $\mathcal{X} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de réels deux à deux distincts.

Si $\sum_i p_i$ converge et a pour somme 1 alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire réelle discrète $X$ sur $(\Omega, \mathscr{E})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ et

$$\forall i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$$