38 Croissances comparées de fonctions.

Proposition 1 - le retour des croissances comparées.

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$.

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$.

Exercice 1.

Déterminez la limite de la fonction f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) $f(x) = \dfrac{e^{4x}}{x^{12}}$ et $a = +\infty$.

b) $f(x) = |x|^5 e^{5x}$ et $a = -\infty$.

c) $f(x) = \frac{\ln(x)^4}{x^7}$ et $a = +\infty$.

d) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{|x|^4}$ et $a = +\infty$.

e) $f(x) = \dfrac{(\ln|x|)^{10}}{x^{17}}$ et $a = +\infty$.

f) $f(x) = |x|^{123} e^{17x}$ et $a = -\infty$.

Corollaire 1 - les croissances comparées bis.

Soient :

. P une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$,

. $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{P(x)} = +\infty$.

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) e^{\alpha x} = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{P(x)} = 0$.

Exercice 2.

Déterminez la limite de la fonction f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) $f(x) = (-2x^7 + 3x)\mathrm{e}^{5x}$ et $a = -\infty$.

b) $f(x) = \dfrac{(\ln(x))^{23}}{7x^3 + 5x^2 + 3x + 2}$ et $a = +\infty$.

c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{x^{17} + x^{13}}$ et $a = +\infty$.

d) $f(x) = \dfrac{(\ln(x))^{19}}{17x^3 + 13x^2 + 11x + 7}$ et $a = +\infty$.

e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{11x}}{17x - 13}$ et $a = -\infty$.

f) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{-2x^7 + 3x^5 - 2x^3}$ et $a = +\infty$.

Exercice 3.

Déterminez la limite de la fonction f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) $f(x) = \dfrac{x^{17}}{\mathrm{e}^{-8x}}$ et $a = -\infty$.

b) $f(x) = \ln(1 - x) + |x|^{3,2}\mathrm{e}^{17x}$ et $a = -\infty$.

c) $f(x) = \dfrac{\ln(x)^5}{x^{11}} \times \dfrac{3x^4 + x + 1}{-7x^4 + 2x^3 + 1}$ et $a = +\infty$.

d) $f(x) = \ln\left(x^8\mathrm{e}^{4x}\right)$ et $a = -\infty$.

e) $f(x) = \dfrac{(-7x^3 + x + 1)\mathrm{e}^{7x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$ et $a = -\infty$.

f) $f(x) = \dfrac{(3x^2 + 2x + 2)}{\mathrm{e}^{3x}} \times \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{x^3}$ et $a = +\infty$.

g) $f(x) = \sqrt{|x|}\mathrm{e}^{3x}$ et $a = -\infty$.

Exercice 4.

Déterminez la limite de la fonction f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) $f(x) = \ln(x)\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{x^3 + 2x^5}{4x^5 + 1} \times \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et $a = +\infty$.

b) $f(x) = x^4 \ln\left(\dfrac{7x^3 + 2x + 1}{7x^3 + 12x^2 + 1}\right)\mathrm{e}^{-x} - 3$ et $a = +\infty$.

c) $f(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\ln(\sqrt[3]{x})}$ et $a = +\infty$.

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{7x}}{|x|^{-3}} + \ln\left(\dfrac{1}{|x|}\right)|x|^{-2}}$ et $a = -\infty$.

e) $f(x) = -\dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^6}$ et $a = +\infty$.

f) $f(x) = 7 + \left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{(x^2 + x + 1)^5}\right)^{1/3}$ et $a = -\infty$.