37 Algorithme de Gauss.

I Système linéaire et application linéaire.

Nous savons calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire. Recherchons maintenant les antécédents.

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminez l'ensemble des antécédents de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ par l'application associée à A.

Proposition 1

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. f une application linéaire associée à la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Rechercher les antécédents de $\vec{y}$ par f équivaut à résoudre le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & y_1 \\ a_{12}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & y_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{1n}x_1 & + & a_{2n}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & y_n \end{array}\right.$$

en les inconnues x_1, x_2, ..., x_m.

II Résoudre un système par l'algorithme de Gauss et substitution.

Proposition 2 - Opérations élémentaires sur les systèmes.

On ne modifie l'ensemble des solutions d'un système linéaire en lui appliquant l'une des transformation suivante.

(i) Échange (de place) de deux lignes L et M : $L \leftrightarrow M$.

(ii) Remplacer la ligne L par λL où $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $L \leftarrow \lambda L$.

(iii) Remplacer la ligne L par la somme de L et d'une autre ligne M : $L \leftarrow L + M$

Un système (ou une matrice) est dit échelonné si sur chaque ligne le premier coefficient non nul apparaît dans une colonne plus à droite que sur la ligne précédente.

La méthode du pivot de Gauss consiste, par des opérations élémentaires sur les lignes, à trouver, à partir d'un système donné, un autre système qui soit échelonné et qui ait le même ensemble de solutions.

À partir du système échelonné on peut par des substitutions trouver les solutions. L'ensemble des solutions sera le plus souvent représenté par une paramétrisation.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire est formée de la somme d'une solution particulière $\vec{x}_0$ de $A(\vec{x}) = \vec{y}$ et des solutions du système homogène $A(\vec{x}) = \vec{0}$. Cette propriété est appelée le *principe de superposition*.

Exercice 2.

Résolvez les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_3 = 4 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$
d) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$
f) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -6x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -6x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

Exercice 3.

Résolvez les systèmes suivants.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ & & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \\ & & & & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 4 \end{array}\right.$

d)

Exercice 4.

Résolvez les systèmes suivants.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 2 \\ 3x & - & 5y & = & 1 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & 3y & - & 7z & = & 10 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & z & = & 1 \\ 4x & + & 7y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$

Exercice 5.

Déterminez les solutions de l'équation $B^2 = A$ d'inconnue $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.