35 Variables aléatoires, généralités.

Dans cette leçon I désigne soit $\mathbb{N}$, soit $\mathbb{Z}$, soit un ensemble fini.

I Variables aléatoires discrètes réelles.

Définition 1

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega, \mathscr{E})$ un espace probabilisable.

Une *variable aléatoire sur $\mathcal{X}$* est une fonction $X : \Omega \to \mathcal{X}$ telle que $\{X = x\} := X^{-1}(\{x\})$ est un événement pour tout $x \in \mathcal{X}$.

Exercice 1.

Une urne contient 5 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On tire simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de boules rouges obtenues.
Précisez Ω et $X(\Omega)$.

Exercice 2.

On dispose de deux dés équilibrés à 6 faces. Sur le premier les faces sont numérotées -2 ; -1, -1 ; 2 ; 3 et 4. Sur le second les faces sont numérotées -3 ; 1 ; 2 ; 4 ; 4 et 5.
On note S la variable aléatoire qui à chaque lancé des deux dés associe la somme des numéros obtenus. Précisez Ω et $S(\Omega)$.

Exercice 3.

Une urne contient $n \in \mathbb{N}$ boules numérotées de 1 à n avec $n \geqslant 2$. On tire successivement et sans remise deux boules. On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros obtenus. Déterminez Ω et $X(\Omega)$.

Exercice 4.

Une urne contient $r \in \mathbb{N}^*$ boules rouges et $b \in \mathbb{N}^*$ boules blanches .
Soit n un entier tel que $1 \leqslant n \leqslant b + r$.
On tire n boules sans remise. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches obtenues parmi les n tirages.
Déterminez $X(\Omega)$.

Proposition 1

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega, \mathscr{E})$ un espace probabilisable,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

$\{\{X = x\} \mid x \in \mathcal{X}\}$ est un système complet d'événements.

Proposition 2

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega, \mathscr{E})$ un espace probabilisable,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire,
. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Les ensembles

$$\{X > a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}, \quad \{X \geqslant a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant a\},$$
$$\{X < a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < a\}, \quad \{X \leqslant a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\},$$

$$\begin{aligned} \{a < X < b\} &= \{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) < b\}, \\ \{a \leqslant X \leqslant b\} &= \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}, \\ \{a \leqslant X < b\} &= \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) < b\}, \\ \{a < X \leqslant b\} &= \{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) \leqslant b\}. \end{aligned}$$

sont des événements.

Exercice 5.

Une urne contient 5 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On tire simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de boules rouges obtenues.
Donnez une description en extension des événements $\{X = 2\}$ et $\{X < 1\}$.

Exercice 6.

On dispose de deux dés équilibrés à 6 faces. Sur le premier les faces sont numérotées -2 ; -1, -1 ; 2 ; 3 et 4. Sur le second les faces sont numérotées -3 ; 1 ; 2 ; 4 ; 4 et 5.
On note S la variable aléatoire qui à chaque lancé des deux dés associe la somme des numéros obtenus.
Donnez une définition en extension des événements $\{S > 0\}$ et $\{S = 9\}$.