34 Unicité de la limite et passage à la limite dans les inégalités.

I Unicité.

Proposition 1 - Unicité de la limite.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

Si f admet ℓ et ℓ' pour limites en a alors $\ell = \ell'$.

Exercice 1.

Proposition 2 - limite finie et fonction bornée.

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

II Comparaison.

Nous retrouvons les résultats de comparaison sur les limites de suites (notamment le théorème des gendarmes).

Proposition 3 - Comparaison de fonctions.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f, g, h : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ des applications,

. I un voisinage de a.

(i)

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \end{array}\right. \Rightarrow g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty.$$

(ii)

$$\left\{\begin{array}{l} g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty \\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \end{array}\right. \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty.$$

(iii)

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \end{array}\right. \Rightarrow \ell \leqslant \ell'.$$

(iv)

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) \end{array}\right. \Rightarrow h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \frac{2\sqrt{x+1}}{2x^2+1}$

1. Justifiez que $f(x) \geqslant x^2$ pour tout $x \in [-1, +\infty[$.
2. Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3.

Soit $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{x} + 1$ une application sur $\mathbb{R}^*$.
En vous aidant d'un encadrement de $\cos(x)$ déterminez les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sin(x)e^x$.
À l'aide d'un encadrement bien choisi montrez que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 5.

On définit pour tout réel x positif la fonction f par : $f(x)=\frac{2x+3}{\cos(x)-2}$.

1. Montrez que pour tout réel x positif, on a : $\frac{2x+3}{-1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x+3}{-3}$.
2. Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.

Exercice 6.

On définit pour tout réel x négatif la fonction f par $f(x)=\frac{2x+3\cos(5x)}{3-2x}$.

1. Montrez que pour tout réel x négatif on a : $\frac{2x-3}{3-2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x+3}{3-2x}$.
2. Déduisez-en la limite de f en $-\infty$.

Exercice 7.

Déterminez, par comparaison avec une fonction simple, la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x)=2x-1+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2+2}$.

Exercice 8.

Soit x un réel. On note $\lfloor x\rfloor$ sa partie entière (le plus grand entier inférieur ou égale à x).

1. Justifiez que pour tout réel x, $x-1 \leqslant \lfloor x\rfloor \leqslant x$.
2. Déduisez-en que $\frac{\lfloor x\rfloor}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
3. Déterminez la limite de $x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$ en 0.