32 Théorème de la limite monotone.

I Le théorème.

Théorème 1 - Théorème de la limite monotone.

Soient $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (au sens de l'inclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$) alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

II Corollaires.

Corollaire 1

Soient $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements (au sens de l'inclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$) alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Corollaire 2

Soient $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_n\right) \text{ et } \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_n\right).$$

III Exercices.

Exercice 1.

On jour indéfiniment et de façon indépendante à pile, 0, ou face, 1, avec une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0;1[$.
L'univers Ω est l'ensemble de toutes les suites dont les termes sont égaux à 0 ou 1, *i.e.* $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$.
On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'événement « obtenir pile au n-ième lancer », A « Ne jamais obtenir pile », B « obtenir au moins un pile ».

1. Exprimez A et B grâce aux événements P_n.
2. Calculez $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 2.

On considère une urne contenant a boules blanches et b boules rouges avec a et b des entiers naturels non nuls.
On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à obtenir une boule blanche et note le numéro de tirage de cette boule blanche en convenant que ce numéro est nul s'il on n'obtient que des boules rouges.
L'univers est donc $\Omega = \mathbb{N}$.
On note, pour $n \in \mathbb{N}$, B_n l'événement « obtenir la boule blanche au n-ième lancer, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A « le numéro de tirage de la boule blanche est supérieur ou égale à N » et B « obtenir au plus N boules rouges ».
Calculez $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 3.

On note p la probabilité qu'il fasse beau en Picardie un jour d'été. On suppose que la météo d'un jour est indépendante de la météo de la veille. Une personne arrive en Picardie et s'interroge sur le nombre de jours de beau temps.
On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, B_n l'événement « il fait beau les n premiers jours » et C_n « il fait beau au moins un jour pendant les n premiers jours ».
Calculez $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right)$ et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right)$.

Exercice 4.

On lance indéfiniment une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile à un lancer quelconque égale $\frac{1}{2}$. Montrez que la probabilité de n'obtenir aucun pile lors de cette expérience est égale à 0. On admettra que les lancer sont indépendants et donc que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} P_k\right) = \Pi_{k=1}^{n}\mathbb{P}(P_k)$ où P_k est l'événement obtenir pile au k-ième lancer.

Exercice 5.

Soient $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geqslant 2$ et $k \in [\![1, N-1]\!]$.
Une urne contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches.
On effectue indéfiniment des tirages d'une boule avec remise dans l'urne.
On note A_i l'événement « n'obtenir aucune boule blanche lors de i premiers tirages » et A l'événement « obtenir au moins une boule blanche ».
Calculez la probabilité de $\overline{A}$ en utilisant les événements A_i puis donner la valeur de $P(A)$.
Pour le calcul de $\mathbb{P}(A_i)$ on écrira $A_i = \bigcap_{k=1}^{i} R_k$ où R_k est l'événement « obtenir une boule rouge au k-ième tirage » et on admettra l'indépendance et donc que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i} R_k\right) = \Pi_{k=1}^{i}\mathbb{P}(R_k)$.