31 Séries géométriques.

I Séries géométriques.

Proposition 1 - Série géométrique.

Soit $q \in \mathbb{R}$.

$\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Si cette série converge alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Proposition 2 - Séries géométriques dérivées.

Soit $q \in \mathbb{R}$.

$\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$ et en cas de convergence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

II La règle de d'Alembert.

Théorème 1 - Règle de d'Alembert.

Soient :

. (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

(i) Si $0 \leq \ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exercice 1.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

a) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

b) $u_n = \dfrac{1}{n!}$.

c) $u_n = \dfrac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$.

d) $u_n = \dfrac{n^n}{n!}6^n$.

e) $u_n = \ln(n)4^n$.

f) $u_n = \dfrac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$.

g) $u_n = n!\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{1}{2^k}\right)$.

h) $u_n = \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$.

i) $u_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$.

Proposition 3 Série exponentielle.

La *série exponentielle* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ converge et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x}.$$

Exercice 2.

Justifiez la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{4^n}{(n+1)!}$ et calculez sa somme.