

30 Formule de Bayes.

Théorème 1 - Formule de Bayes

Soient :

- . $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,
- . $B \in \mathcal{E}$ un événement tel que : $\mathbb{P}(B) > 0$,
- . $n \in \mathbb{N}^*$

Si $\{A_1, \dots, A_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles alors

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}.$$

Exercice 1.

Une information circule parmi les étudiants. Chaque étudiant la transmet fidèlement avec une probabilité $p \in]0; 1[$ et la déforme en son contraire avec une probabilité $q = 1 - p$.

Le premier étudiant détient la bonne information.

1. Quelle est la probabilité que le deuxième étudiant détienne la bonne information ?
2. Quelle est la probabilité que le troisième étudiant détienne la bonne information ?
3. Quelle est la probabilité que le deuxième étudiant détienne la bonne information sachant que le troisième étudiant est bien informé ?

Exercice 2.

Dans une population donnée, deux maladies M_1 et M_2 sont observables chez respectivement 10 % et 20 % des individus. On suppose que le nombre des malchanceux qui souffrent à la fois de M_1 et M_2 est négligeable (nul), pour simplifier. On entreprend un dépistage systématique de ces maladies au moyen d'un test unique. Ce test est positif pour 90 % des malades de M_1 , 70 % des malades de M_2 et 10 % des individus sains.

1. Pour un individu choisi au hasard, avec quelle probabilité le test est-il positif ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pour lequel le test est positif soit atteint de la maladie M_1 ? Même question avec M_2 ?

Exercice 3.

On dispose de 4 dés à 6 faces, dont un pipé, qui tombe sur 1 avec une probabilité de $\frac{5}{6}$ et donne une même probabilité aux autres faces. On choisit au hasard un dé parmi les 4, on le lance $2n$ fois et on obtient n fois l'entier 1. Avec quelle probabilité le dé choisi est-il pipé ?

Exercice 4.

Soit $n \geq 3$ un entier. Une urne contient n pièces. Il se trouve que $n-1$ d'entre elles sont normales et équilibrées : lorsque l'on les lance on fait pile avec probabilité $1/2$ et face aussi. La dernière pièce est truquée, elle est face des deux côtés. On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce.

1. Quelle est la probabilité qu'on obtienne face pendant les n premiers lancers ?
2. Sachant que l'on a obtenu face lors des n premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir pris la pièce truquée ? Quelle est la limite de probabilité quand n tend vers l'infini ?

Exercice 5.

Un questionnaire à choix multiples propose $n \geq 2$ réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la bonne réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

