

## 29 Limites et composition.

### I Composition de fonctions.

Proposition 1 - Passage à la limite dans une fonction.

Soient :

- .  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ ,
- .  $\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}$ ,
- .  $a \in \mathcal{D}_f \cup \{+\infty, -\infty\}$ ,
- .  $b \in \mathcal{D}_g \cup \{+\infty, -\infty\}$ ,
- .  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ,
- .  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$  des applications telles que  $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \\ g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell \end{array} \right. \Rightarrow g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

### II Composition d'une suites par une fonction .

Corollaire 1 - Application au cas des suites.

Soient :

- .  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ ,
- .  $a \in \mathcal{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ,
- .  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ,
- .  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une application,
- .  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{D}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \end{array} \right. \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

### III Exercices.

## Exercice 1.

Déterminez la limite de  $f$  en  $a$ .

a)  $f(x) = e^{-x}$  et  $a = +\infty$ .

b)  $f(x) = (e^{4x} + 1)^2$  et  $a = -\infty$ .

c)  $f(x) = (x^2 + 1)^5$  et  $a = -\infty$ .

d)  $f(x) = \left(\frac{2}{3-2x}\right)^{12}$  et  $a = \frac{3}{2}$ .

e)  $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$  et  $a = 0$ .

f)  $f(x) = \sqrt[3]{-3x^7 + 4^3 + 2x^2 + 7}$  et  $a = +\infty$ .

g)  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$  et  $a = -\infty$ .

## Exercice 2.

Déterminez les limites suivantes.

a)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 3}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1-0,5x}$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (5-x)^3$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^4}$ .

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x-2}$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2+x+e^{-x}}$ .

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+x+1}$ .

h)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{2}{x}}$ .

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 3e^{2x})^5$ .

j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{4x^2 + 1}}$ .

k)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3xe^{3x}$ .

l)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^{2-x}$ .

## Exercice 3.

Déterminez les possibles limites de la suite  $(u_n)$  en supposant qu'elle converge.

a)  $u_{n+1} = 4u_n - 7.$

b)  $u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 4.$

c)  $u_{n+1} = (u_n + 1)(u_n - 2)(4u_n + 7) + u_n.$

d)  $u_{n+1} = \frac{(u_n - 2)(u_n + 7)}{u_n^2 + 1} + u_n.$

e)  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2u_n - 3}{7u_n^2 + 5} + u_n.$

f)  $u_{n+1} = \ln(u_n) + u_n.$

g)  $u_{n+1} = e^{u_n} + u_n.$

## Exercice 4.

Déterminez la limite de la suite.

a)  $\exp(-u_n)$  avec  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$

b)  $\ln\left(\frac{1}{u_n + 1}\right)$  avec  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$

c)  $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right)$  avec  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty.$

d)  $-2u_n^3 + 3u_n^2 + 1$  avec  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty.$

e)  $-2u_n^3 + 3u_n^2 + 1$  avec  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 3.$

f)  $\ln(u_n) + e^{-u_n}$  avec  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$

## Exercice 5.

Déterminez la limite de la suite.

a)  $e^{n^2 - n + 3}.$

b)  $e^{n^2 - n^7 + n}.$

c)  $\ln\left(\sqrt[3]{2^n}\right).$

d)  $\ln\left(\frac{\ln(n^{-2} + \sqrt{n})}{1 + \frac{1}{n}}\right)$

e)  $\ln\left(\frac{6n^2 + 2n - 6}{n + 1}\right).$

f)  $\exp\left(\frac{n^3 + 3n + 4}{n^8 + 7}\right).$

g)  $\sin\left(\frac{\pi n^4 + n - 8}{2n^4 + 7n^3 - 100n^2 + 6}\right).$