28 Opérations sur les matrices.

I Somme de matrices et produit par un réel.

Les résultats vus sur les vecteurs se généralisent aux matrices.

Définition 1

Soient :

. $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

. $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$ et $B = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle somme des matrices A et B la matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}\,.$$

On appelle produit de la matrice A par le nombre λ la matrice :

$$\lambda A := (\lambda \times a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}\,.$$

Exercice 1.

Calculez les combinaisons linéaires de matrices.

a) $A = 2\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $C = {}^t\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

e) $E = -2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

f) $F = 3E_{1,1} - 2E_{1,2} + 4E_{2,1}$ où les $E_{i,j}$ sont des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

g) $G = 3\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

Exercice 2.

Exprimez $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, grâce à une somme double, comme combinaison linéaire des matrices élémentaires E_{ij}.

Exercice 3.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exprimez A en fonction de J et I_3.

II Produit de matrices.

Définition 2

Soient :

. n, m et p des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. $B = (b_{jk}) \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R}$.

Nous appellerons produit (matriciel) de A et B la loi qui à A et B associe la matrice $C = (c_{ik})$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}.$$

On notera $A \times B = C$ ou $AB = C$.

Exercice 4.

a) $A = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $E = \begin{pmatrix} 45 & 43 & -77,2 \\ 7/15 & 0 & 1 \\ 10^3 & \ln(5) & \mathrm{e}^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f) $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$.

h) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez $-3I_2 + 2C + C^2$.

Exercice 6.

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Calculez AB puis BA.

Exercice 7.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculez AB.

Exercice 8.

Soient $n \geqslant 1$ et $D = (d_{kl})$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ d_{kl} = 1.$$

Déterminez D^p pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 9.

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que :

   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   et écrivez les relations de récurrence vérifiées par les suites (a_n) et (b_n).
2. Déduisez-en A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exprimez, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n en fonction de I_3, J et n