27 Séries à termes positifs.

I Généralités.

1 Définitions, vocabulaire.

Définition 1

Soit :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On appelle *série de terme général u_n* la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *sommes partielles* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous noterons $\sum u_n$ la série de terme général u_n.
Si $(S_n)_n$ converge alors nous dirons que la série $\sum u_n$ converge. Sinon nous dirons qu'elle diverge.
Si $\sum u_n$ converge alors la limite de (S_n) est appelée *la somme de la série* et est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 1.
Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que la série, dont le terme général est une constante, converge.

Proposition 1 - Condition nécessaire de convergence.

Soit :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition 2

Soit :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Nous dirons que $\sum u_n$ *diverge grossièrement* si et seulement si (u_n) ne tend pas vers 0.

Exercice 2.

Montrez que la série $\sum_{n>0} \ln(n+1) - \ln(n)$ diverge mais qu'elle ne diverge pas grossièrement.

Exercice 3.

Montrez que $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2 - n - 1}{n^2 + n + 1}$ diverge.

2 Étude de la convergence d'une série positive.

Proposition 2 - Lemme fondamental.

(i) Une série à termes positifs converge ou tend vers $+\infty$.

(ii) Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

3 Opérations sur les séries.

Il existe bien entendu des produits sur les séries. Cependant leur définition est complexe et nous laisserons donc le produit de côté il nous reste la somme et la multiplication par un réel (donc les combinaisons linéaires.

Nous noterons $\alpha \sum u_n + \sum v_n$ la série $\sum \alpha u_n + v_n$.

Proposition 3 - Somme de série et nature.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors $\sum \alpha u_n + v_n$ converge.
S'il y a convergence alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha u_n + v_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Une petite extension du résultat précédent mais surtout une façon de voir différemment les choses.

Proposition 4

On ne change pas la nature d'une série en lui ajoutant une série convergente.

4 Convergence absolue.

Nous nous intéresserons principalement aux séries à termes positifs. Bien entendu il existe des suites qui ne le sont pas. Nous allons voir un résultat qui nous permettra souvent, à partir d'une série quelconque, de nous ramener à l'étude d'une série à termes positifs.

Définition 3

Nous dirons que $\sum u_n$ *converge absolument* si et seulement si $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 1 - Lien entre convergence et convergence absolue.

Toutes série réelle absolument convergente est convergente.

De plus, si $\sum u_n$ est absolument convergente :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

II Des séries de référence.

1 Séries arithmétique.

Proposition 5

$\sum rn + u_0$ converge si et seulement si $r = u_0 = 0$.

2 Série des entiers.

Proposition 6

$\sum n$ diverge vers $+\infty$ et $\sum_{k=0}^{n} k \sim \frac{1}{2}n^2$.

3 Série des carrés.

Proposition 7

$\sum n^2$ diverge vers $+\infty$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 \sim \frac{1}{3}n^3$.

4 Série des cubes.

Proposition 8

$\sum n^3$ diverge vers $+\infty$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3 \sim \frac{1}{4}n^4$.

Exercice 4.

Justifiez que la série de terme général $u_n = -3n^3 + 4n^2 + n + 2$ diverge et donnez un équivalent des sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5 Séries géométriques.

Proposition 9

Soit $q \in \mathbb{R}$.

$\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Si cette série converge alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Exercice 5.

Déterminez l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}_+^*$ tels que la série $\sum (\ln(\sqrt{x}))^n$ diverge.

6 Séries géométriques dérivées.

Proposition 10

Soit $q \in \mathbb{R}$.

$\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$ et en cas de convergence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

III Exercices.

Exercice 6. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$.

1. Montrez : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
2. Déduisez-en que la série converge et calculez $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 7.

1. Montrez qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ unique, que l'on calculera, tel que : $\forall x \in [1; +\infty[,\ \frac{x-1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.
2. Montrez que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n-1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$ converge et calculez sa somme.