26 Formule des probabilités totales.

I La formule.

Rappelons la définition de système complet d'événements (aussi appelée famille complète d'événements).

Définition 1

Soient :

. Ω un univers,

. $\mathscr{E}$ une tribu sur Ω,

. $\mathscr{P}$ une famille d'événements appartenant à la tribu $\mathscr{E}$.

Nous dirons que $\mathscr{P}$ est *une famille complète d'événements* si l'une et l'autre conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\forall A \in \mathscr{P},\ \forall B \in \mathscr{P},\ A \neq B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$.

(ii) $\bigcup_{A \in \mathscr{P}} A = \Omega$.

Théorème 1 - Formule des probabilité totales

Soient $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités strictement positives. Pour tout $B \in \mathscr{E}$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)$$

II Exercices.

Exercice 1.

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 10 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 6 blanches. On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 2.

On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires.
Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire au troisième tirage.

Exercice 3.

Une personne appelle au hasard un service téléphonique et tombe sur la ligne occupée. On considère que si la ligne est occupée à un instant, elle reste occupée à l'instant d'après avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ et que si elle est libre à un instant, elle redevient occupée à l'instant d'après avec une probabilité de $\frac{5}{6}$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement « la ligne est occupée à l'instant n » et a_n sa probabilité.
Déterminez a_{n+1} en fonction de a_n, puis déduisez-en a_n en fonction de n entier naturel.

Exercice 4.

Au petit-déjeuner, je mange soit des tartines, soit des céréales. Si je me prépare des tartines un matin, je mange de nouveau des tartines le lendemain avec une probabilité égale à $\frac{3}{4}$, mais si je me fais des céréales, j'en remange le lendemain avec une probabilité de $\frac{4}{5}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité pour que je me fasse des tartines le n-ème jour au petit-déjeuner.
Calculez $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Quelle interprétation en faire ?

Exercice 5.

$\frac{1}{4}$ d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{12}$ de malades.
Parmi les malades, il y a 4 non vaccinés pour un vacciné.
Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?