25 Opérations algébriques sur les limites de fonctions.

I Additions.

f \ g	ℓ	$+\infty$	$-\infty$.
m	$m+\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Exercice 1.

Déterminez si possible la limite de f en a.

a) $f(x) = -4x^2 + x - 7$ et $a = -\infty$.

b) $f(x) = e^x + \sqrt{x}$ et $a = -\infty$.

c) $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$ et $a = 0^+$.

d) $f(x) = x^3 - \sqrt[3]{x}$ et $a = +\infty$.

II Produits.

f \ g	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$m = 0$	0	0	0	?	?
$m < 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exercice 2.

Déterminez si possible la limite de f en a.

a) $f(x) = e^x \ln(x)$ et $a = +\infty$.

b) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $a = 0^+$.

c) $f(x) = \frac{1}{x} + e^x + x^4 \ln(|x|)$ et $a = -\infty$..

d) $f(x) = (4x^2 - 6x)e^x$ et $a = -\infty$.

III Limites et inverses.

f	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	?	$+\infty$	$-\infty$	0	0

IV Quotients et limites.

En combinant inverse et produit nous obtenons de nouveaux résultats sur les limites de fonctions.

f \ g	$\ell > 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$\frac{m}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$m = 0$	0	?	?	0	0	0
$m < 0$	$\frac{m}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	?

Exercice 3.

Déterminez si possible la limite de f en a.

a) $f(x) = \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{1}{-x^2 - x}$ et $a = +\infty$.

b) $f(x) = \dfrac{4x+1}{x-2}$ et $a = 2$.

c) $f(x) = \dfrac{x^4}{e^x}$ et $a = -\infty$.

V Polynômes et fractions rationnelles.

Un polynôme est une expression algébrique formée d'une somme de monôme, c'est-à-dire d'expression ax^n (avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$). Le degré du monôme ax^n est la puissance n.

Dans des expressions polynomiales la factorisation par le monôme dominant permet de lever les indéterminations (de la forme $+\infty - (+\infty)$) en $\pm\infty$.

Proposition 1 - Fonctions polynomiales.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$.

La fonction polynomiale $x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_0$ admet une limite en $\pm\infty$ et celle-ci est la même que celle de $a_n x^n$ en $\pm\infty$.

$$a_n x^n + \cdots + a_0 \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}$ par

$$f(x) = \frac{2x+3}{4x+3}.$$

1. Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. (Pour ceux qui connaissent la dérivation.) Construisez le tableau de variation de f.

Exercice 5.

Soit f une fonction polynomiale de degré 3. Étudiez les limites de f à l'infini.

Corollaire 1 - Fonctions rationnelles.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $a_n \neq 0$.

. $m \in \mathbb{N}^*$,

. $(b_0, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ avec $b_m \neq 0$.

La fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$ admet une limite en $\pm\infty$ et celle-ci est la même que celle de $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$ en $\pm\infty$.

$$\frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0} \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Exercice 6.

Déterminez les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto -2x^7 + 4x^3 + x$.

b) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 - x^4$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1}{4x^3 + 2x + 7}$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 + 10x^2 + x}{x^{12} + 1}$.

e) $f : x \mapsto \dfrac{7x^{32} - 13x^{17} + x + 2}{-3x^{32} + x + \pi}$.

f) $f : x \mapsto \dfrac{2x^5 - x^3 + x^6}{2x^4 + x^4 + x^7}$.

VI Exercices.

Exercice 7.

Déterminez les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 1$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \mathrm{e}^2 x - x^3 \mathrm{e}^x$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{4\mathrm{e}^x}{x}$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^2}$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}{x}$.

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x}{\mathrm{e}}$.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5 - 3x}{\mathrm{e}^x}$.

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5x - 1)\mathrm{e}^x$.

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x + 3)\mathrm{e}^x$.

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x - \mathrm{e}^x$.

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 - 2\mathrm{e}^x$.

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x\mathrm{e}^x$.

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\mathrm{e}^x - x)\mathrm{e}^x$.

o) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{1 + \frac{1}{x}}$.

p) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-4}{2 - x}$.

q) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\ln(x) + \mathrm{e}^x}{x^2 + 1}$.

Exercice 8.

Déterminez si possible la limite de f en a.

a) $f(x) =$ et $a = +\infty$.

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$ et $a = +\infty$.

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$ et $a = 0$.

d) $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$ et $a = -\infty$.

e) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 2x}$ et $a = -\infty$.

f) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 15x + 100$ et $a = +\infty$.

g) $f(x) = \dfrac{1}{-x^3 - x^2 + 12}$ et $a = +\infty$.

h) $f(x) = \mathrm{e}^x + x^2$ et $a = -\infty$.

i) $f(x) = \mathrm{e}^x + x^2$ et $a = +\infty$.

j) $f(x) = (x\sqrt{x} + 1)(x - 2)$ et $a = +\infty$.

k) $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ et $a = +\infty$.

l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(1 + x^2)$ et $a = +\infty$.

m) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{x}$ et $a = +\infty$.

n) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2(x+1)}$ et $a = 3$.

o) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$ et $a = 2$.

p) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{2x - 4}$ et $a = 2$.

q) $f(x) = -\dfrac{2}{1 - 2x}$ et $a = \frac{1}{2}$.

r) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$ et $a = 0$.

s) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-9}$ et $a = 3$.

t) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 3x + 2}$ et $a = -1$.

u) $f(x) = -\dfrac{x^2 - 2x - 1}{x^3 - 8}$ et $a = 2$.

v) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 3}$ et $a = \pm\infty$.

w) $f(x) = \dfrac{-x^3 + 4x^2 + 5}{x^3 + 8}$ et $a = \pm\infty$.

x) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{3x^5 + x^2 + 1}$ et $a = \pm\infty$.

y) $f(x) = \dfrac{(4x-3)(x^2+1)}{x^3+4}$ et $a = \pm\infty$.

z) $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 4}$ et $a = -2$.

Exercice 9.

Dressez le tableau de variation et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.