24 Sommes doubles.

I Indices indépendants.

Exercice 1.

Calculez $S(n)$.

a) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i$.

b) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i + j$.

c) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$.

d) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{2i-j}$.

Correction de l'exercice 1

a) $n \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} i = n \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $n^2(n+1)$.

c) $\sum_{i=1}^{n} i \left(\sum_{j=1}^{n} j \right) = \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} i = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

d) $\sum_{i=1}^{n} \left(2^2\right)^i \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \sum_{i=1}^{n} 4^i \times \frac{1}{2} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) 4 \times \frac{1-4^n}{1-4}$

II Indices dépendants.

Exercice 2.

Déterminez des expressions semblables à celles de la proposition précédente pour $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}$ et $\sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{ij}$.

Correction de l'exercice 2

0	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	$\sum_{j=2}^{n} a_{1j}$
0	0	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	$\sum_{j=3}^{n} a_{2j}$
0	0	0	$\dots$	a_{3n}	$\sum_{j=4}^{n} a_{3j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	$\dots$	0	$\sum_{j=1}^{n} a_{nj}$
				Total :	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}$

0	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	
0	0	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	
0	0	0	$\dots$	a_{3n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
0	0	0	$\dots$	0	Total :
0	$\sum_{i=1}^{2-1} a_{i2}$	$\sum_{i=1}^{3-1} a_{i3}$	$\dots$	$\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}$	$\sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$

Exercice 3.

Exprimez sous forme d'une somme simple puis, si possible, calculez $S(n)$.

a) $S(n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i$.

b) $S(n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$.

c) $S(n) = \sum_{1\leqslant j< i\leqslant n} j$.

d) $S(n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \max(i,j)$.

e) $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 2^j$.

Correction de l'exercice 3

a)

$i \backslash j$	1	2	3	$\dots$	n
1	1	1	1	$\dots$	1
2	0	2	2	$\dots$	2
3	0	0	3	$\dots$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	0	0	0	$\dots$	n

En sommant suivant les colonnes :

$$\begin{aligned}
S(n) &= \left(\sum_{i=1}^{1} i\right) + \left(\sum_{i=1}^{2} i\right) + \left(\sum_{i=1}^{3} i\right) + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&= \frac{1+(1+1)}{2} + \frac{2+(2+1)}{2} + \frac{3(3+1)}{2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4}
\end{aligned}$$

b)

$i \backslash j$	1	2	3	$\dots$	n
1	1×1	1×2	1×3	$\dots$	$1\times n$
2	0	2×2	2×3	$\dots$	$2\times n$
3	0	0	3×3	$\dots$	$3\times n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	0	0	0	$\dots$	$n\times n$

En sommant suivant les colonnes :

$$\begin{aligned}
S(n) &= 1\times\sum_{i=1}^{1} i + 2\times\sum_{i=1}^{2} i + 3\times\sum_{i=1}^{3} i + \cdots + \sum_{i=1}^{n} i\\
&= 1\times\frac{1(1+1)}{2} + 2\times\frac{2(2+1)}{2} + 3\times\frac{3(3+1)}{2} + \cdots + n\times\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2\\
&= \frac{1}{2}\times\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

c)