

24 Sommes doubles.

Dans cette leçon nous allons séparer les sommes doubles (avec deux indices) en deux sommes comportant un seul indice pour en faciliter le calcul.

Nous aurons besoin dans les exercices de la somme des entiers, de la somme des carrés d'entiers, de la somme des termes d'une suite géométrique.

I Indices indépendants.

Proposition 1 - Somme double à indices indépendants.

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls.

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

Exercice 1.

Calculez $S(n)$.

a) $S(n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i.$

b) $S(n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i + j.$

c) $S(n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij.$

d) $S(n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2^{2i-j}.$

II Indices dépendants.

Proposition 2 - Somme double à indices dépendants.

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij}.$$

Exercice 2.

Déterminez des expressions semblables à celles de la proposition précédente pour $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}$ et $\sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{ij}$.

Exercice 3.

Exprimez sous forme d'une somme simple puis, si possible, calculez $S(n)$.

a) $S(n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i.$

b) $S(n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij.$

c) $S(n) = \sum_{1 \leq j < i \leq n} j.$

d) $S(n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \max(i, j).$

e) $S(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n 2^j.$